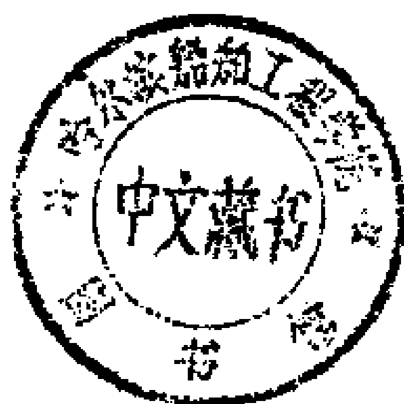
微分拓扑讲义

张筑生 编著



北京大学出版社

·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

微分拓扑讲义/张筑生编著. — 北京：北京大学出版社，1996.10

ISBN 7-301-03101-7

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微分拓扑-高等学校-教材
Ⅳ. O189.3

书　　名：微分拓扑讲义

著作责任者：张筑生　编著

责任编辑：刘　勇

标准书号：ISBN 7-301-03101-7/O·374

出　版　者：北京大学出版社

地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排　印　者：北京大学印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

850×1168毫米　32开本　9印张　230千字

1996年10月第一版　1996年10月第一次印刷

印　　数：0001—3,000册

定　　价：13.50元

内 容 简 介

微分拓扑是本世纪成就和影响最大的数学分支之一，在许多学科领域有广泛重要的应用.1983年诺贝尔经济奖的得主曾生动地讲述微分拓扑方法帮助他实现关键的突破. 世界著名大学都将微分拓扑列为大学生和研究生的重要课程并列为博士资格考试的重要科目.

本书是根据作者近年来多次在北京大学数学系讲授"微分拓扑"课的讲稿写成. 全书共十二章，前两章和附录较详细地介绍必要的预备知识，第三章至第十二章讲述微分拓扑的基本概念与基本方法并配有重要应用的例子. 全书的讲解很注重启发性，所选材料有广泛的应用面，体现了学科现代化的大趋势，适应于数学、计算、力学、物理、经济等多个学科大学生、研究生和科技工作者的需要.

本书可作为综合大学和高等师范院校数学、计算、力学、物理、经济等学科高年级大学生和研究生的教材，也可供青年数学教师和科技工作者阅读.

序　言

微分拓扑是本世纪成就和影响最大的数学分支之一．因与微分拓扑有关的研究而获得 Fields 奖殊荣的数学家就有好几位．许多国家的著名大学都将“微分拓扑”列为大学生和研究生的重要课程并且列为博士资格考试的重要项目．微分拓扑在其他学科领域也有重要的应用．1983 年诺贝尔经济学奖的得主 Gérard Debreu 在获奖演说中，对于微分拓扑的方法帮助他实现关键性的突破曾有生动的描述．(该获奖演说的译文“数学思辨模式的经济理论”载于《数学进展》杂志第 17 卷 3 期(1988 年 7 月)．)

微分拓扑的教材，较早且影响深远的有 1958 年 Milnor 在 Princeton 大学讲授微分拓扑的讲义(序言附记中所列的文献[1])．到了 60 年代，先后出现了两本讲述微分拓扑的非常精彩的小册子．1963 年出版的 Munkres 的《初等微分拓扑学》(序言附记中的[2])，着重介绍某些最基本的微分拓扑技术手段(他所称的“初等”技术)．1965 年出版的 Milnor 的《从微分观点看拓扑》(序言附记中的[3])更为人们所珍爱．该书侧重于用微分的技术手段解决拓扑问题，对许多经典的拓扑定理作了简单明快引人入胜的处理．稍后出版的微分拓扑教材还有序言附记中列出的[4]，[5] 和[6] 等，其中[4] 着重于用微分技术解决拓扑问题(可以看成是[3] 的延伸)；[6] 着重于介绍基本概念与基本技术；[5] 则对两方面都有所兼顾．

笔者多年来在北京大学给研究生和部分高年级大学生讲授微分拓扑课程．这本讲义就是整理积累的讲稿写成的．作为研究生基本课程的教材，应该有较宽广的适应面．笔者希望能兼顾“基本技术”与“解决重要而又有魅力的问题”等方面．序言附记中列出的[1]—[6] 都可作为阅读本书的重要参考资料(书末还列有其他参

考文献）．学习这门课程的预备知识是有关微分流形的一些最基本的概念与事实．本书的第一章对所需的预备知识作了简单扼要的讲解（书中的第一章，第二章和最后的附录 δ 是流形论基础知识的一个概述）．本书第三章至第六章重点讲解微分拓扑学的一些最基本的概念并重点介绍一些典型的技巧方法，这些都是学习微分拓扑所必须掌握的．第七章至第十二章一方面继续讲解某些重要概念，另一方面着重于介绍基本概念和典型技巧方法的广泛应用．各章所证明的著名定理对数学的各分支及其他许多学科的研究与应用都是非常重要的．在整理讲稿的时候，笔者曾为叙述的启发性而煞费苦心，希望能避免过分的形式化而强调问题的实质．第四章讲解向量丛与管状邻域、映射的光滑化与同伦的光滑化等非常重要的内容，却从很简单的引例开始，力图做到形象生动并且深入浅出．对初学者而言，在各章的学习过程中自己举出一些实例并且画一些适当的示意图形以帮助理解，仍然是很有必要的．笔者热诚欢迎读者们的意见和建议．笔者诚挚地感谢姜伯驹教授和李忠教授对本书出版的支持，感谢责任编辑刘勇所做的细致工作．

根据笔者的经验，本书的材料适用于每周授课 3 学时的一学期课程．如果希望对内容作适当的删减以开设一个较少学时的课程，那么以下一些建议或许有所帮助：

(1) 如果学生对点集拓扑和微分流形的基础知识已经有了较好的理解，那么第一章和第二章的大部分内容都不必在课堂上讲授．

(2) 第三章和第四章所介绍的嵌入与管状邻域技术是很重要的．但应强调的是 Whitney 嵌入定理与管状邻域定理的结论．至于这些定理证明的细节处理，在讲课的时候却是大可省略的．

(3) 第五章 §3 和 §4 的材料亦可省略．因为在该章的 §5 中利用参数横截定理所作的关于横截逼近定理的证明，适用于无边流形与带边流形这两种情况．

(4) 第八章至第十二章的材料可以根据实际情况有选择有重点地讲述其中的一部分. 例如,可以重点地讲述模 2 情形的映射度和相交数,然后通过类比简单地介绍定向情形的相应结论(省去大部分证明).

张 筑 生

1995 年 7 月于北京大学

附记 主要参考书介绍

[1] Milnor, J., *Differential Topology*. 译文载入《从微分观点看拓扑》一书(熊金城译),上海科学技术出版社,1983.

[2] Munkres, J., *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, 1963.《初等微分拓扑学》(李培信译),上海科学技术出版社,1966.

[3] Milnor, J., *Topology from a Differential Viewpoint*, University of Virginia Press, 1965.《从微分观点看拓扑》(熊金城译),上海科学技术出版社,1983.

[4] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., 1974.

[5] Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag New York Inc., 1976.

[6] Bröcker, Th. and Jänich, K., *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.

关于编号的说明

项目编号 在每一章里，引理、命题、定义、定理和注记等项目用两个数码统一编号：前一数码表示项目所在的节，后一数码表示项目在该节中的顺序，两个数码之间有小圆点隔开．

公式编号 在每一章里，公式用带有圆括弧的两个数码编号：前一数码表示公式所在的节，后一数码表示公式在该节中的顺序，两个数码之间有小圆点隔开．

项目与公式的引用 在同一章中引用时，直接写出所引项目或公式的编号．在不同章中引用时，先要指明所引项目或公式所在的章，然后才是其编号．

图或图表的编号 在全书中，图和图表统一按顺序编号．

关于某些符号与用语的说明

常以 $\mathrm{id}: X\to X$表示集合 X的恒同映射(id 将 X的每一点映到自己).

常以 $\#E$ 表示集合 E 的基数(对于有限集合,就是该集合中的元素个数).

如无另外的说明,讲义中所谈到的"可数"均表示"至多可数",即包括"有限"的情形.

对于 $\mathbb{R}$的有限子集 F, 常以 $\max F$ 表示 F 中的最大数,并用 $\min F$ 表示 F 中的最小数. 对于 $\mathbb{R}$中的更一般的(不一定有限的)子集 G, 常以 $\sup G$ 表示 G 中数的上确界,并用 $\inf G$ 表示其下确界.

符号 sgn 表示这样一个实函数:

$$\operatorname{sgn} x:=\begin{cases} 1, & \text{对于 } x>0; \\ 0, & \text{对于 } x=0; \\ -1, & \text{对于 } x<0. \end{cases}$$

这里和以后许多类似的情形,我们都以符号" := "表示"定义为",即表示"右边的式子是左边记号的定义".

对于 $n\times n$ 方阵 A, 常以 $\det A$ 表示其行列式. 对于 $m\times n$ 矩阵 B, 约定以 $\operatorname{rank} B$ 表示它的秩.

对于拓扑空间的子集 S, 常以

$$\operatorname{int} S$$

表示 S 的内部(即由 S 的全体内点组成的集合). 还约定以

$$\overline{S}$$

表示 S 的闭包(即包含 S 的最小闭集).

设 (X, d)是距离空间. 对于 X的非空子集 E 和 F, 我们约定记

$$d(E, F):=\inf_{x\in E,\ y\in F}\{d(x, y)\}.$$

常用小写的拉丁字母，例如 x，表示空间 $\mathbb{R}^m$ 中的点．这时，常以带上标（或带下标）的 x 表示 x 的各分量，例如

$$x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

常以 $\|x\|$ 表示 x 的 Euclid 范数，即

$$\|x\|:=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2}\ .$$

对于定义于 $D\subset\mathbb{R}^m$ 并且映入 $\mathbb{R}^n$ 的函数 f，也可用附以上标（或下标）的办法指明其分量，例如：

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x)),$$

其中 $x=(x^1,\cdots,x^m)\in D$．对类似这样的情形，上标的意义可以从行文中看出，不致于被误认成幂指数．

如果 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x))$$

是定义于 D 上的连续可微映射，那么该映射的 Jacobi 行列式（常简记为 $J_f(x)$）指的是

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}:=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n}\end{vmatrix}.$$

讲义中常用“在 p 点邻近”的说法表示“在 p 点的某个邻域中”这样的意思．例如：“f 是在 p 点邻近有定义的 C^r 函数”意指“函数 f 在 p 点的某个开邻域内有定义，并且在该邻域内是 r 阶连续可微的”．

如无另外的说明，讲义中所提到的流形均被认为是满足第二可数公理的．

我们还约定用方框记号“□”表示：“证明完成”或者“证明较简单，不再写出了”这样的意思．

目　　录

第一章 预备知识

阅读本书的预备知识是有关微分流形和可微映射的一些最基本的概念和一些最基本的结论. 本章的§1～§3对这部分内容作了一个简明扼要的介绍. 更详尽的材料可以从许多教科书或参考书里查到(例如参考文献的[Au], [Bo], [Ch], [Go]和[Wa]).

在§4里, 将利用"逆函数定理"给出"代数基本定理"一个新颖的证明. 逆函数定理是微分流形概念的基石. 熟练灵活地掌握运用逆函数定理对于学习微分拓扑这门课程是至关重要的. §4所介绍的代数基本定理的证明是运用逆函数定理的范例. 经典定理的别开生面的新证明也总是能引起人们浓厚的兴趣. 为了便于查阅, 在附录α中还按照我们需要的形式陈述并证明了逆函数定理.

§1 微分流形

按照Bourbaki学派的观点, 数学研究的对象是各种结构. 通常的Euclid空间$\mathbb{R}^m$至少有两种重要的结构: 拓扑结构和代数结构(线性空间结构). 函数连续性的概念只涉及其中第一种结构. 可微性的概念则涉及两种结构, 因为微分$Df(x)=A$的定义牵涉到线性运算和极限概念:

$$f(x+h)-f(x)-Ah=o(\|h\|).$$

可微性的概念可以推广到有拓扑结构和线性代数结构这两种结构的其他空间, 例如Banach空间(甚至更一般的拓扑线性空间). 这些有整体线性结构的空间, 应该被看成"平直"的空间. 人们不满足于"平直"空间的微分学, 希望能进一步研究"弯曲"空间的微分学, 这不仅是数学发展自然的要求, 也是力学、物理与其他许多

应用数学的学科的需要．

经验告诉我们，如果不撕破，不重叠就无法把球面摊成平面区域(半球面是可以摊成平面区域的)．拓扑学也证明了球面不可能与平面区域同胚．正因为如此，要把地球表面画成地图，就非得把球面“撕破”不可．有好多种“撕破”的办法，对应着世界地图的好些种画法．

像球面这样的几何对象当然不可能有整体的线性结构．但可微性的定义只涉及到函数在一点邻近的性质．换句话说，这定义是“局部”的．对于球面 S 这样的几何对象，如果在某点 $p\in S$ 的邻近 U 能引入局部坐标

$$\varphi: U \to \mathbb{R}^2,$$

那么对于函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 自然可以讨论复合函数

$$f\circ\varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

在 p 点邻近的可微性(参看图 1)．但若在点 p 邻近，引入不同的

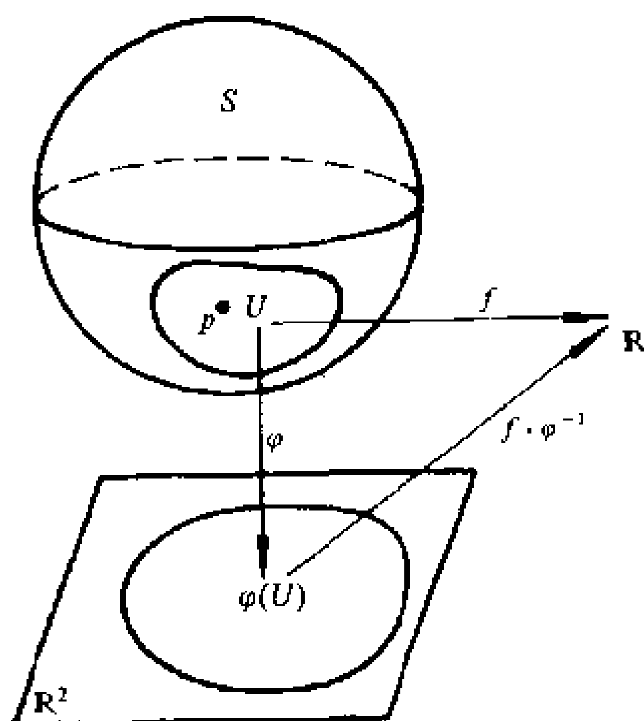


图 1

局部坐标:

$$\varphi: U \to \mathbb{R}^2, \quad \psi: V \to \mathbb{R}^2.$$

函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 在 p 点邻近也就有两种不同的局部表示

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \mathbb{R}, \quad f \circ \psi^{-1}: \psi(V) \to \mathbb{R}.$$

或许会发生这样的情形: f 的这两种局部坐标表示有不同的可微性质. 这时就难以根据某一局部表示定义 f 在点 $p \in U \cap V$ 的可微性. 为了避免在 $U \cap V$ 上可微性的定义出现歧义,应该要求两局部坐标之间的坐标变换

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

和

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

都是连续可微的. 有了这样的条件,就可以由 $f \circ \varphi^{-1}$ 的可微性推论出

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

的可微性,反之亦然. 这就是说: 两种局部坐标对于讨论函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 的可微性是协调一致的或者说是相容的. 如果能找到一族局部坐标,其定义域覆盖了整个球面 S,并且两两在其定义域交叠的部分上是相容的,那么就可以无歧义地讨论函数 $f: S \to \mathbb{R}$ 在整个 S 上的可微性了. 这时可以说,在 S 上给出了一种微分结构. 微分流形定义的基本想法就是这样的.

微分流形

设 M 是一个拓扑空间,满足 Hausdorff 分离公理. (在本书以后的各章节中,还要求 M 满足第二可数公理,详见第二章的有关陈述.)

(U, φ) 称为是 M 的一个**局部坐标图卡**或者一个**图卡**(chart),如果 U 是 M 的一个开集,φ 是从 U 到 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $\varphi(U)$ 的同胚映射. (U 称为图卡的定义域.)

M 的两个图卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 被称为是 **C^r 相容的**,如果有以

下两种情形之一成立:

(1) 或者 $U\cap V=\varnothing$;

(2) 或者 $U\cap V\neq\varnothing$, 并且坐标变换

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

和

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

都是 C^r 映射.

M 的一族图卡 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$ 被称为是一个 C^r **图汇**(atlas), 如果

(Ⅰ) $\mathscr{D}$ 中各图卡的定义域覆盖了 M;

(Ⅱ) $\mathscr{D}$ 中任意两个图卡都 C^r 相容.

M 的一个 C^r 图汇 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$ 被称为是**极大**的, 如果它除了(Ⅰ)和(Ⅱ)而外还满足条件

(Ⅲ) 与 $\mathscr{D}$ 中各图卡 C^r 相容的任何图卡 (V,ψ) 都属于 $\mathscr{D}$.

M 的一个极大 C^r 图汇, 即满足上面要求(Ⅰ), (Ⅱ)和(Ⅲ)的一族图卡, 被称为是 M 上的一个 **C^r 结构**. M 连同一个给定的 C^r 结构被称为是一个 **C^r 流形**. $r\geqslant 1$ 情形的 C^r 流形统称为**微分流形**. C^∞ 流形又称为**光滑流形**.

因为任何一个图汇都包含在一个确定的极大图汇之中, 所以任何一个 C^r 图汇都确定一个唯一的 C^r 结构.

在上面的定义中, 要求 M 的每一点都有一个邻域与 $\mathbb{R}^m$ 的某个开集同胚. 我们把这里的 m 称为是流形 M 的**维数**, 记为

$$\dim M=m.$$

子流形

设 M 是 C^r 流形, $\dim M=m$; S 是 M 的一个子集. 如果对任何 $p\in S$, 存在 C^r 流形 M 的图卡 (U,φ), 使得 $p\in U$ 并且

$$(*)\qquad \varphi(U\cap S)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^s\times 0),$$

那么我们就称 S 为 M 的 s 维**(正则)子流形**, 并把适合条件(*)的

图卡 (U,φ) 称为关于子流形 S **正则的图卡**.

显然上面定义中的子流形 S 本身是一个 C^r 流形,其维数 $\dim S=s$.

带边流形

我们已经定义了以 m 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中的开集为局部模式的流形(无边流形). 这里将进一步定义以半空间

$$\mathbb{R}^m_+=\{(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m\mid x^1\geqslant 0\}$$

中的开集为局部模式的流形——**带边流形**.

设 M 是一个拓扑空间,满足 Hausdorff 分离公理(在本书以后的各章节里还要求 M 满足第二可数公理,详见第二章的有关陈述).

(U,φ) 被称为是 M 的一个**局部坐标**或者一个**图卡**,如果 U 是 M 的一个开集,φ 是从 U 到 $\mathbb{R}^m_+$ 中某个开集的同胚映射.

M 的两个图卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 被称为是 **C^r 相容的**,如果有以下两种情形之一成立:

(1) 或者 $U\cap V=\varnothing$;

(2) 或者 $U\cap V\neq\varnothing$,并且坐标变换

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

和

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

都是 C^r 映射.

M 的一族图卡 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$ 被称为是一个 **C^r 图汇**,如果

(Ⅰ) $\mathscr{D}$ 中各图卡的定义域覆盖了 M;

(Ⅱ) $\mathscr{D}$ 中任意两个图卡都是 C^r 相容的.

M 的一个 C^r 图汇 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$ 被称为是**极大的**,如果它除了(Ⅰ)和(Ⅱ)而外还满足条件

(Ⅲ) 与 $\mathscr{D}$ 中各图卡 C^r 相容的任何一个图卡 (V,ψ) 都属于 $\mathscr{D}$.

M 的一个极大 C^r 图汇,即满足上面条件(Ⅰ)、(Ⅱ)和(Ⅲ)的

一族图卡定义了 M 上的一个 **C^r 结构**. M 连同一个给定的 C^r 结构被称为是一个 **C^r 带边流形**. 显然无边流形可以看成是带边流形的特殊情形.

带边流形的**子流形**可仿照无边流形情形给出定义.

$p\in M$ 被称为是带边流形 M 的**边缘点**, 倘若存在 M 的图卡 (U,φ), 使得 $p\in U$, 并且

$$\varphi(p)\in\{(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}_+^m \mid x^1=0\}.$$

M 的全体边缘点的集合被称为是 M 的**边缘**, 记为 ∂M. 容易看出, 如果 $\partial M\neq\varnothing$, 那么边缘 ∂M 本身是一个维数为

$$\dim M-1=m-1$$

的无边流形.

注记 尚须对上面带边流形定义中的条件(2)作一些解释. 那里的 $\varphi(U\cap V)$ 是 $\mathbb{R}_+^m\subset\mathbb{R}^m$ 中的开集 ($\varphi(U\cap V)$ 并不一定是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集). 映射

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\mathbb{R}^m$$

的 r 阶连续可微性应该理解为: 存在 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $G\supset\varphi(U\cap V)$, 使得 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 可适当地扩充定义到开集 G 上, 并且扩充后的映射是从 G 到 $\mathbb{R}^m$ 的 r 阶连续可微映射.

§2 可微映射

设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$,

$$f: M\to N$$

是连续映射, $p\in M$. 分别取 M 和 N 的图卡 (U,φ) 和 (V,ψ), 使得

$$p\in U,\quad f(p)\in V.$$

必要时适当缩小 U, 可设 $f(U)\subset V$. 考察映射

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)\subset\mathbb{R}^n.$$

这个映射被称为 f 在 p 点邻近的**局部表示**.

局部表示 $\tilde{f}$ 是从 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $\varphi(U)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的映射, 因而可

以讨论其连续可微性．如果$\tilde{f}$是C^r的，那么我们就说f**在p点邻近是C^r的**．如果f在M上处处都是C^r的，则称f为**C^r映射**(C^0映射即连续映射，C^∞映射又称为**光滑映射**)．

请注意，虽然可微性的定义是借助于局部坐标加以陈述的，但这一性质本身并不依赖于局部坐标的具体选择．

如果$f:M\to N$是一一对应，并且f和f^{-1}都是C^r映射，则称f为**C^r同胚**．$r\geqslant 1$情形的C^r同胚统称为**微分同胚**，C^∞同胚又称为**光滑同胚**．

设M和N是C^r流形，U是M中的开集，$p\in U$．如果映射

$$f:U\to N$$

是从U到开集$f(U)\subset N$的C^r同胚，那么我们就说f是从p点邻近到$f(p)$点邻近的**局部C^r同胚**．

设M和N是C^r流形(满足条件$\dim M=m$, $\dim N=n$, $r\geqslant 1$)、$f:M\to N$是C^r映射，$p\in M$．选择M和N的局部坐标(U,φ)和(V,ψ)，满足条件：$p\in U$, $f(U)\subset V$．作局部表示

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V).$$

考察$\tilde{f}$在$\varphi(p)$点的微分(即Jacobi矩阵)的秩

$$\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}.$$

如果另有M和N的局部坐标(U_1,φ_1)和(V_1,ψ_1)也满足：

$$p\in U_1,\quad f(U_1)\subset V_1,$$

那么我们有另一局部表示

$$\tilde{f}_1=\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}:\varphi_1(U)\to\psi_1(V).$$

容易证明

$$\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f}_1)_{\varphi_1(p)}=\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}.$$

因而$\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}$实际上不依赖于局部坐标的选择，它反映了$f$在$p$点的性质，我们把它称为是$f$在$p$点的**秩**，记为$\operatorname{rank}_p f$．这就是说，我们定义

$$\operatorname{rank}_p f:=\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}.$$

下面考察关于秩的几种重要的情形．

(Ⅰ) 如果 $m=n$, $\mathrm{rank}_p f=m=n$, 那么 f 就是从 p 点邻近到 $q=f(p)$ 点邻近的局部 C^r 微分同胚. (这实质上就是逆函数定理, 请参看本章后的附录 α.)

(Ⅱ) 如果 $m\leqslant n$, $\mathrm{rank}_p f=m$, 则称 f 在 p 点是**浸入**. 如果 f 在 M 的每一点都是浸入, 则称 f 为**浸入映射**. 例如: 从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的标准放入映射

$$j: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}=\mathbb{R}^n,$$
$$(x^1,\cdots,x^m)\mapsto(x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0),$$

就是一个浸入映射.

(Ⅲ) 如果 $m\geqslant n$, $\mathrm{rank}_p f=n$, 则称 f 在 p 点是**淹没**. 如果 f 在 M 的每一点都是淹没, 则称 f 为**淹没映射**. $m\geqslant n$ 时, 从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的标准投影映射

$$\pi: \mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^n$$
$$(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m)\mapsto(x^1,\cdots,x^n)$$

就是淹没映射的一个典型的例子.

我们可以选取适当的局部坐标图卡, 使得浸入与淹没具有非常简单的局部表示.

2.1 命题(浸入的典范局部表示) 设 $f: M\to N$ 在 p 点是浸入. 则存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ) 和 $q=f(p)$ 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ), 使得

$$f(U)\subset V,\quad \varphi(p)=0,\quad \psi(q)=0,$$
$$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=j\,|\,\varphi(U),$$

这里 j 是从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}=\mathbb{R}^n$ 的标准放入映射, 即

$$j: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}$$
$$x\mapsto(x,0).$$

证明 首先选取 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U_1,φ) 和 N 在 q 点邻近的局部坐标图卡 (V_1,ψ_1), 适合这样的条件:

$$f(U_1)\subset V_1,\quad \varphi(p)=0,\quad \psi_1(q)=0.$$

考察局部表示 $\widetilde{f}_1=\psi_1\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(p)=0$ 点的微分. 不妨设

$$(\mathrm{D}\widetilde{f}_1)_0=\begin{bmatrix} A_{m\times m} \\ \cdots\cdots\cdots \\ * \end{bmatrix}_{n\times m},$$

其中的 $A_{m\times m}$ 是非退化方阵:

$$\det A_{m\times m}\neq 0.$$

考察映射

$$F: \varphi(U_1)\times\mathbb{R}^{n-m}\to\mathbb{R}^n$$
$$(x,y)\mapsto \widetilde{f}_1(x)+(0,y).$$

因为

$$(\mathrm{D}F)_{(0,0)}=\left[\begin{array}{c:c} A_{m\times m} & 0 \\ \hdashline * & I_{(n-m)\times(n-m)} \end{array}\right],$$

所以 F 是从 $(0,0)$ 点的某个开邻域 $H\subset\varphi(U_1)\times\mathbb{R}^{n-m}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $G\subset\psi_1(V_1)$ 的微分同胚. 我们记

$$V=\psi_1^{-1}(G)\subset V_1,\quad U=U_1\cap f^{-1}(V)\subset U_1.$$

则有 $\psi_1(V)=G=F(H)$. 又因为

$$F\circ j(x)=F(x,0)=\widetilde{f}_1(x),$$

所以有如下的交换图表(图 2). 取 $\psi=F^{-1}\circ\psi_1$. 则局部坐标图卡

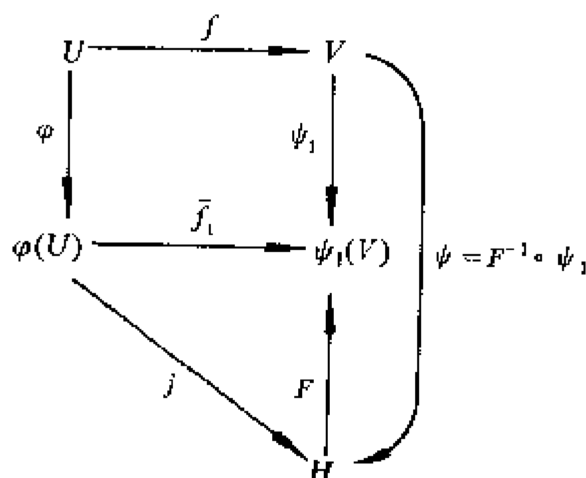


图 2

(U,φ) 和 (V,ψ) 使得局部表示 $\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 具有如下性质:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x)=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x)&=F^{-1}\circ\psi_1\circ f\circ\varphi^{-1}(x)\\&=F^{-1}\circ\widetilde{f}_1(x)=j(x),\quad\forall x\in\varphi(U).\end{aligned}$$

这就是

$$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=j\,|\,\varphi(U).\qquad\square$$

2.2 命题(淹没的典范表示) 设 $f:M\to N$ 在点 $p\in M$ 是淹没,则存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ) 和 $q=f(p)$ 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ),使得

$$f(U)\subset V,\quad \varphi(p)=0,\quad \psi(q)=0,$$
$$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=\pi\,|\,\varphi(U),$$

这里的 $\pi:\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{m-n}\to\mathbb{R}^n$ 是标准的投影映射.

证明 首先选取 p 点邻近的局部坐标图卡 (U_1,φ_1) 和 q 点邻近的局部坐标图卡 (V_1,ψ),适合这样一些条件:

$$f(U_1)\subset V_1,\quad \varphi_1(p)=0,\quad \psi(q)=0.$$

考察局部表示 $\widetilde{f}_1=\psi\circ f\circ\varphi_1^{-1}$ 在 $\varphi_1(p)=0$ 点的微分. 不妨设

$$(\mathrm{D}\widetilde{f}_1)_0=\left[A_{n\times n}\ \vdots\ *\right],$$

其中 $A_{n\times n}$ 是非退化方阵. 考察映射 $F:\varphi_1(U_1)\to\mathbb{R}^m$,其分量表示为:

$$\begin{cases}F^1(x^1,\cdots,x^m)=(\widetilde{f}_1)^1(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ F^n(x^1,\cdots,x^m)=(\widetilde{f}_1)^n(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m),\\ F^{n+1}(x^1,\cdots,x^n)=x^{n+1},\\ F^{n+2}(x^1,\cdots,x^m)=x^{n+2},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ F^m(x^1,\cdots,x^m)=x^m.\end{cases}$$

因为

$$(\mathrm{D}F)_0=\left[\begin{array}{c:c} A_{n\times m} & * \\ \hdashline 0 & I_{(m-n)\times(m-n)} \end{array}\right],$$

所以存在 $\mathbb{R}^m$ 中的开子集 G, $0\in G\subset\varphi_1(U_1)$, 使得 F 是从 G 到 $\mathbb{R}^m$ 中某个包含 0 点的开集 H 的微分同胚. 记 $U=\varphi_1^{-1}(G)\subset U_1$, $\varphi=F\circ\varphi_1$, 则有如下的交换图表(图 3):

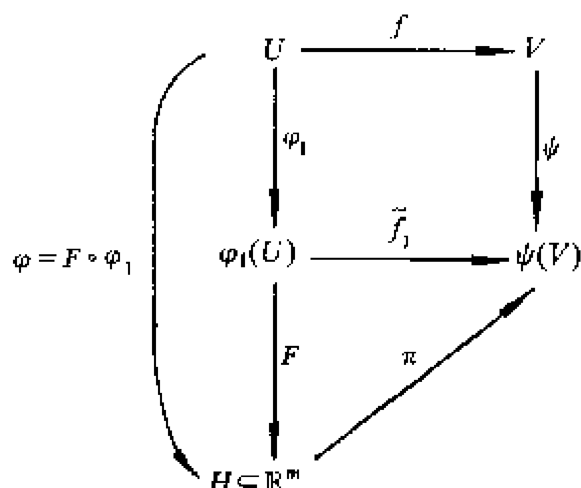


图 3

局部坐标图卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 使得 f 的局部表示具有以下形式

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=\psi\circ f\circ\varphi_1^{-1}\circ F^{-1}=\tilde{f}_1\circ F^{-1}=\pi\,|\,\varphi(U). \qquad \square$$

§3 切空间与切映射

设 M 是一个微分流形, $p\in M$. 流形 M 上过 p 点的一条**可微曲线**是这样一个可微映射

$$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,$$

它满足条件 $\gamma(0)=p$. 所有的过 p 点的可微曲线的集合记为 $\mathscr{M}_p$; 所有的在 p 点邻近有定义的连续可微实函数的集合记为 $\mathscr{M}_p^*$. 对于 $\gamma\in\mathscr{M}_p$ 和 $f\in\mathscr{M}_p^*$, 我们引入记号:

$$\langle f, \gamma \rangle_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t)|_{t=0}.$$

3.1 定义 在 $\mathscr{M}_p$ 上引入"**相切关系**"~，规定

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \langle f, \gamma_1 \rangle_p = \langle f, \gamma_2 \rangle_p, \quad \forall f \in \mathscr{M}_p^*.$$

容易验证：相切关系~是一种等价关系．集合 $\mathscr{M}_p$ 按相切关系分类，每一等价类 $[\gamma]$ 被称为是微分流形 M 在 p 点的一个**切向量**．全体这样的切向量的集合

$$M_p = \mathscr{M}_p / \sim$$

被称为微分流形 M 在 p 点的**切空间**．通常将微分流形 M 在 p 点的切空间记为 T_pM．（暂时我们还只能把切空间 $T_pM = M_p$ 看作一个集合．稍后赋予它适当的线性结构之后，就可以把 $T_pM = M_p$ 看成一个线性空间．）

对于切向量 $[\gamma] \in M_p$，我们可以定义

$$\langle f, [\gamma] \rangle := \langle f, \gamma \rangle_p.$$

取微分流形 M 在 p 点邻近的局部坐标 (U, φ)，考察其坐标分量函数

$$x^j = \pi^j \circ \varphi, \quad j = 1, \cdots, m.$$

这里的 π^j：$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是到第 j 个因子空间的投影．因为

$$\begin{aligned}
\langle f, \gamma \rangle_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t)|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(t)|_{t=0} \\
&= \sum_j \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^j \circ \gamma(t)|_{t=0} \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right)_{\varphi(p)} \langle x^j, \gamma \rangle_p,
\end{aligned}$$

所以，为了判断 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{M}_p$ 是否相切，只须用 p 点邻近任意一个局部坐标 (U, φ) 的坐标分量 $x^1, \cdots, x^m$ 作为检验函数，检验是否有

$$\langle x^j, \gamma_1 \rangle_p = \langle x^j, \gamma_2 \rangle_p, \quad j = 1, \cdots, m.$$

3.2 定义 设$[\gamma]$是微分流形 M 在 p 点的一个切向量；(U,φ) 是 M 在 p 点邻近的局部坐标，$x^1,\cdots,x^m$ 是其坐标分量函数．我们把

$$\xi^j=\langle x^j,[\gamma]\rangle,\quad j=1,\cdots,m,$$

称为切向量$[\gamma]\in M_p$ 的**坐标分量**．

选定了 M 在 p 点邻近的一个局部坐标 (U,φ) 之后，用上面所说的方式，可使每个切向量$[\gamma]$唯一地对应着一个 m 维向量

$$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m)\in\mathbb{R}^m.$$

反过来，对于每一个 m 维向量

$$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m)\in\mathbb{R}^m,$$

也恰有一个切向量$[\gamma]\in M_p$，其坐标分量是 $\xi^1,\cdots,\xi^m$．该切向量可以由过 p 点的这样一条曲线 γ 所给出（选取足够小的 $\varepsilon>0$）：

$$\gamma(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+t\xi),\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

这样，每当选定了 M 在 p 点邻近的一个局部坐标 (U,φ) 之后，就能按上述方式建立起切空间 M_p 与 $\mathbb{R}^m$ 之间的一一对应：

$$\varphi_*: M_p\to\mathbb{R}^m,$$

$$[\gamma]\mapsto\xi;$$

$$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m),\quad \xi^j=\langle x^j,[\gamma]\rangle,\quad j=1,\cdots,m.$$

设 (V,ψ) 是 M 在 p 点邻近的另一局部坐标，其坐标分量函数为

$$y^j=\pi^j\circ\psi,\quad j=1,\cdots,m.$$

设切向量$[\gamma]\in M_p$ 相应于 (V,ψ) 的坐标分量为 $\eta^1,\cdots,\eta^m$．因为

$$\psi\circ\gamma(t)=(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma(t)),$$

所以切向量$[\gamma]$的新旧坐标分量之间按照以下法则变换：

$$\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\cdot\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t},$$

也就是

$$\eta^j=\sum\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\xi^k. \tag{3.1}$$

变换(3.1)中的系数方阵

$$\left[\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right]_{m\times m}$$

即是映射 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的 Jacobi 方阵．我们把这方阵所表示的线性变换(即映射 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 的微分)记为 $(\psi\circ\varphi^{-1})_*$．于是，(3.1)式可以写成

(3.2) $$\psi_*=(\psi\circ\varphi^{-1})_*\circ\varphi_*.$$

由此又得到

(3.3) $$\psi_*^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})_*=\varphi_*^{-1}.$$

选定了 M 在 p 点邻近的一个局部坐标 (U,φ) 之后，借助于一一对应

$$\varphi_*: M_p\to\mathbb{R}^m,$$
$$[\gamma]\mapsto\xi,$$

我们可以将 $\mathbb{R}^m$ 中的线性结构移植到 M_p 之上．这就是说，我们可以定义

$$[\beta]+[\gamma]:=\varphi_*^{-1}(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma])),$$
$$c[\gamma]:=\varphi_*^{-1}(c\varphi_*([\gamma])).$$

如果换用 M 在 P 点邻近的另一局部坐标 (V,ψ)，那么利用(3.2)和(3.3)式可得

$$\begin{aligned}&\psi_*^{-1}(\psi_*([\beta])+\psi_*([\gamma]))\\&\quad=\psi_*^{-1}((\psi\circ\varphi^{-1})_*(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma])))\\&\quad=(\psi_*^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})_*)(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma]))\\&\quad=\varphi_*^{-1}(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma])).\end{aligned}$$

类似地可以得到

$$\psi_*^{-1}(c\psi_*([\gamma]))=\varphi_*^{-1}(c\varphi_*([\gamma])).$$

这就是说，我们用上面所说的方式定义的 M_p 中的线性运算，实际上与局部坐标的具体选择无关．

用上述方式定义了线性结构之后，切空间 $T_pM=M_p$ 成为线性空间，并且映射

$$\varphi_* : T_pM \to \mathbb{R}^m$$

是线性空间之间的同构:

$$\varphi_*([\beta]+[\gamma])=\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma]), \quad \varphi_*(c[\gamma])=c\varphi_*([\gamma]).$$

考察 $\mathbb{R}^m$ 中的标准基底

(3.4) $$\delta_j=(\delta_j^1, \delta_j^2, \cdots, \delta_j^m), \quad j=1,\cdots,m,$$

其中

$$\delta_j^i=\begin{cases}1, & 若\ i=j,\\ 0, & 若\ i\neq j.\end{cases}$$

同构

$$\varphi_*^{-1} : \mathbb{R}^m \to T_pM$$

将 $\mathbb{R}^m$ 的基底(3.4)变成 T_pM 的一组基底,我们将这组基底记为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

换句话说,我们约定记

(3.5) $$\frac{\partial}{\partial x^k}=\varphi_*^{-1}(\delta_k), \ k=1,2,\cdots,m.$$

切向量 $[\gamma]\in T_pM$ 经同构 φ_* 映成 $\mathbb{R}^m$ 中的一个向量 ξ,其分量为

$$\xi^j=\langle x^j, [\gamma]\rangle, \quad j=1,2,\cdots,m.$$

于是有

$$\varphi_*([\gamma])=\sum_k \xi^k\delta_k, \qquad [\gamma]=\varphi_*^{-1}\left(\sum_k \xi^k\delta_k\right)=\sum_k \xi^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

3.3 命题 选定了 M 在 p 点邻近的局部坐标之后,

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial x^m}$$

成为切空间 T_pM 的一组基底. 切向量 $[\gamma]\in T_pM$ 对这组基底展开的系数恰好为

$$\xi^k=\langle x^k, [\gamma]\rangle, \quad k=1,2,\cdots,m.$$

3.4 定义 设 M 和 N 是微分流形, $F: M\to N$ 是可微映射, $p\in M$. 映射 F 诱导出这样一个从 $T_pM=M_p$ 到 $T_{F(p)}N=N_{F(p)}$ 的

映射:

$$F_* : M_p \to N_{F(p)}$$
$$[\gamma] \mapsto [F\circ\gamma].$$

这诱导映射 F_* 被称为是映射 F 在 p 点的**切映射**.

任意选取 M 在 p 点邻近的局部坐标 (U,φ) 和 N 在 $F(p)$ 点邻近的局部坐标 (V,ψ),记

$$\widetilde{F}=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}.$$

对于 $[\gamma]\in M_p$, 设

$$[\gamma]=\sum_{k=1}^{m}\xi^k\frac{\partial}{\partial x^k},\qquad F_*([\gamma])=[F\circ\gamma]=\sum_{j=1}^{n}\eta^j\frac{\partial}{\partial y^j},$$

则有

$$\eta^j=\langle y^j,[F\circ\gamma]\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y^j\circ F\circ\gamma(t)|_{t=0}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\widetilde{F}^j}{\partial x^k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^k\circ\gamma(t))|_{t=0}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\widetilde{F}^j}{\partial x^k}\langle x^k,[\gamma]\rangle$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\widetilde{F}^j}{\partial x^k}\xi^k.$$

3.5 命题 切映射 $F_* : M_p\to N_{F(p)}$ 是一个线性映射,它的分量表示 $\widetilde{F}_*$ 是由 Jacobi 矩阵

$$\left[\frac{\partial\widetilde{F}^j}{\partial x^k}\right]_{n\times m}$$

所决定的线性映射. 请参看下面的交换图表(图 4):

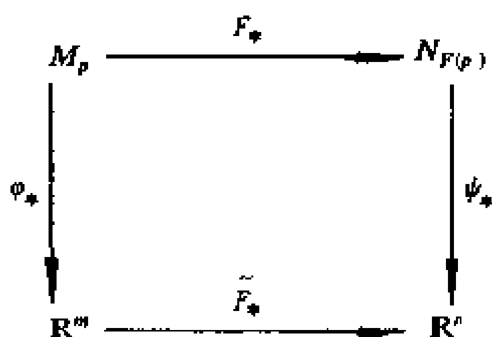


图 4

§4 代数基本定理的"拓扑"证明

经典的代数基本定理断言：**任何不是常数的复系数代数多项式至少有一个复根**. 1799 年以来,代数基本定理已经有了为数众多的证明,但没有一个证明是纯代数的. 下面将要介绍的证明是逆函数定理的有趣的应用.

首先指出,通过将 $x+\mathrm{i}y$ 看成 (x,y),可以将复平面 $\mathbb{C}$ 的拓扑与实平面 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑等同视之. 把 $U\subset\mathbb{C}$ 同时也看做 $\mathbb{R}^2$ 的子集,可以将映射 $\varphi: U\to\mathbb{C}$ 表示为:

$$\varphi(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y).$$

这样,映射 $\varphi: U\to\mathbb{C}$ 决定了这样一个映射:

$$(4.1)\qquad \begin{cases} U\to\mathbb{R}^2, \\ (x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y)). \end{cases}$$

4.1 引理 设 U 是 $\mathbb{C}$ 中的开集(也看作 $\mathbb{R}^2$ 中的开集), $\varphi: U\to\mathbb{C}$ 是可微复函数. 则由 φ 所决定的形如(4.1)那样的映射在 (a,b) 点处的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=|\varphi'(c)|^2,$$

其中 $c=a+\mathrm{i}b$.

证明 沿着平行于 x 轴的方向和平行于 y 轴的方向考察极限

$$\lim_{z\to c}\frac{\varphi(z)-\varphi(c)}{z-c},$$

我们看到

$$\varphi'(c)=\frac{\partial u}{\partial x}(a,b)+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b)-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(a,b).$$

因而有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(a,b)}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(a,b)},\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(a,b)}=-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(a,b)},$$

$$|\varphi'(c)|^2=\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)_{(a,b)}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(a,b)}$$

$$=\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(a,b)}. \qquad \square$$

4.2 引理 考察函数 $\varphi(z)=z^m(m\geqslant 1)$. 设 b 是非零复数,则存在定义于 b^m 邻近的连续可微的复函数 ψ,满足

$$(\psi(w))^m=w,\quad \psi(b^m)=b.$$

证明 因为

$$\varphi'(b)=mb^{m-1}\neq 0,$$

所以(根据逆函数定理)φ 是从 b 点邻近到 b^m 点邻近的局部微分同胚,因而存在定义于 b^m 点邻近的连续可微的逆函数 ψ,它满足

$$\varphi(\psi(w))=w,\quad \psi(\varphi(z))=z.$$

由此得到

$$(\psi(w))^m=w,\quad \psi(b^m)=b. \qquad \square$$

4.3 引理 设 $n\geqslant 1$,则 n 次复系数多项式 $f(z)$ 所定义的从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射是一个**开映射**. 这就是说,任何一个开集 $G\subset\mathbb{C}$ 经映射 f 之后的像集 $f(G)$ 仍是 $\mathbb{C}$ 中的开集. 特别地,$f(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}$ 中的

开集．

证明 只须对任意的 $c\in G$，证明存在 c 点的开邻域 $U\subset G$，使得 $f(U)$ 包含了 $f(c)$ 点的一个开邻域 W．为此，我们将 $f(z)$ 表示为

$$f(z)=f(c)+(z-c)^m g(z),$$

其中 $m\geqslant 1$，$g(z)$ 是一个 $n-m$ 次复系数多项式，适合条件 $g(c)\neq 0$．以下分两种情形讨论．

情形 1 $m=1$．对这种情形，

$$f'(c)=g(c)\neq 0.$$

根据逆函数定理，f 将 c 点的一个开邻域 $U\subset G$ 映成 $f(c)$ 点的开邻域 W．

情形 2 $m>1$．对这种情形，我们首先选取 $b\in\mathbb{C}$ 适合 $b^m=g(c)$（即取 b 为 $g(c)$ 的任意一个 m 次方根）．根据引理 4.2，存在定义于 $b^m=g(c)$ 点邻近的连续可微函数 ψ，适合

$$(\psi(w))^m=w,\quad \psi(g(c))=b\neq 0.$$

于是，我们可以在 c 点邻近将 f 表示为

$$f(z)=f(c)+((z-c)h(z))^m,$$

其中 $h(z)=\psi(g(z))$ 是连续可微函数，并且满足条件

$$h(c)=\psi(g(c))=b\neq 0.$$

考察这样两个函数：

$$F(z)=(z-c)h(z),\quad \Phi(\zeta)=\zeta^m.$$

因为

$$F'(c)=h(c)\neq 0,$$

所以 F 将 c 点的一个开邻域 $U\subset G$ 映成以 $F(c)=0$ 为中心的一个开圆盘 D．而 Φ 则将开圆盘 D 映成以 0 点为中心的开圆盘 V．限制在 U 上，我们可以将 f 写成

$$f(z)=f(c)+\Phi(F(z)).$$

因而 $f(U)$ 包含了 $f(c)$ 点的一个开邻域 W，这里的 $W=f(c)+V$ 是由 0 点的开邻域 V 经平行移动而得到的． □

4.4 引理 设 $n\geqslant 1$，$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是由 n 次复系数多项式 $f(z)$

所定义的映射，则像集 $f(\mathbb{C})$ 是一个闭集．

证明 设 $w_k=f(z_k)\in f(\mathbb{C}),\ k=1,2,\cdots$，满足条件

$$\lim_{k\to\infty} w_k=w_0\in\mathbb{C}. \tag{4.2}$$

我们来证明：存在 $z_0\in\mathbb{C}$，使得 $f(z_0)=w_0$．

首先可以断定$\{z_n\}$是有界序列．否则，将有$\{z_k\}$的子序列趋于 ∞，与(4.2)矛盾．其次，从有界序列$\{z_k\}$中可以选出收敛子序列 $\{z_{k_s}\}$．设

$$\lim_{s\to\infty} z_{k_s}=z_0,$$

则有

$$f(z_0)=\lim_{s\to\infty} f(z_{k_s})=\lim_{s\to\infty} w_{k_s}=w_0. \qquad \square$$

4.5 代数基本定理 设 $n\geqslant 1$，则 n 次复系数多项式至少有一个复根．

证明 根据引理 4.3 和引理 4.4，$f(\mathbb{C})$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上一个既开又闭的集合．因为 $\mathbb{C}$ 是连通的，并且显然 $f(\mathbb{C})\neq\varnothing$，所以只能有

$$f(\mathbb{C})=\mathbb{C}.$$

这证明了对任何 $w\in\mathbb{C}$，方程 $f(z)=w$ 都有解．特别地，方程 $f(z)=0$ 至少有一个复根． $\square$

利用引理 4.3，还可以作出代数基本定理的另一个证明．该证明可以看成是经典的 Argand-Cauchy 证明的更为直观的拓扑摹本．

4.6 代数基本定理的又一证明

因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$，所以存在 $R>0$，使得

$$|z|\geqslant R \Longrightarrow |f(z)|>|f(0)|.$$

记

$$K=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\leqslant R\},$$

则函数 $|f(z)|$ 在 K 上的最小值必定在 K 内部的某点 c 取得．我们指出这时必有 $f(c)=0$．否则，因为 f 将 c 点的一个开邻域 U(不妨设 $U\subset K$) 映成 $f(c)$ 点的一个开邻域 W，所以必有 W 中的某点 $w=f(z)$ 使得

$$|f(z)|<|f(c)|,$$

但这与 $|f(c)|$ 的最小性矛盾(参看图 5)． □

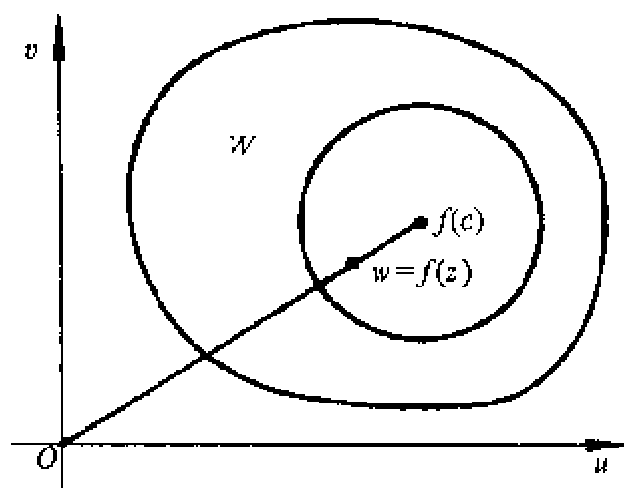


图 5

附录α 逆函数定理

α.1 引理 设 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个可逆线性映射，则存在正实数 σ，使得

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

证明 因为 A 是可逆线性映射，所以

$$\xi\neq 0\Longrightarrow A\xi\neq 0.$$

易知 $\|Ax\|$ 是变元 x 的连续函数，因而它在球面 $S=\{\xi\in\mathbb{R}^n\,|\,\|\xi\|=1\}$ 上取得最小值

$$\inf_{\xi\in S}\{\|A\xi\|\}=\sigma>0.$$

因为对任何非零的 x 有 $\frac{x}{\|x\|}\in S$，所以

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\geqslant\sigma,$$

即

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|.$$

上式对 $x=0$ 显然也成立． □

α.2 引理 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，

$$f: G\to\mathbb{R}^n$$

是 C^r 映射($r\geqslant1$)，$a\in G$．如果 $\mathrm{D}f(a)=A$ 是可逆线性映射，那么存在 a 点的开邻域 $U\subset G$ 和实数 $\omega>0$，使得

$$\|f(x')-f(x)\|\geqslant\omega\|x'-x\|,\quad \forall x',x\in U.$$

因而 f 限制在 U 上是一个单映射．

证明 记 $\varphi(x)=x-A^{-1}f(x)$，则有

$$\mathrm{D}\varphi(a)=0.$$

因而存在 a 点的开邻域 $U\subset G$，使得限制在 U 上有

$$\|\mathrm{D}\varphi(x)\|\leqslant\rho<1,$$

这里 ρ 是取定的介于 0 和 1 之间的实数，例如可取 $\rho=1/2$．于是，对于任何 $x',x\in U$ 有

$$\|\varphi(x')-\varphi(x)\|\leqslant\rho\|x'-x\|.$$

又因为

$$f(x')=A(x'-\varphi(x')),\quad f(x)=A(x-\varphi(x)),$$

所以有

$$\begin{aligned}\|f(x')-f(x)\|&=\|A((x'-\varphi(x'))-(x-\varphi(x)))\|\\&\geqslant\sigma\|x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x))\|\\&\geqslant\sigma(\|x'-x\|-\|\varphi(x')-\varphi(x)\|)\\&\geqslant\sigma(1-\rho)\|x'-x\|=\omega\|x'-x\|,\end{aligned}$$

这里的 σ 是引理 α.1 中所述的正实数，$\omega=\sigma(1-\rho)>0$． □

α.3 引理 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$f: G\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射

$(r\geqslant 1)$．如果对任何 $x\in G$, 线性映射 $\mathrm{D}f(x)$ 都是可逆的，那么 $f(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集．

证明　任取 $a\in G$, 将证 $f(G)$ 包含 $b=f(a)$ 的一个开邻域．

根据引理 α.1, 存在 a 点的开邻域 $U\subset G$, 使得 f 限制在 U 上是单映射．取足够小的实数 $\lambda>0$, 使得

$$\overline{B}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|\leqslant\lambda\}\subset U.$$

考察球面 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|=\lambda\}$. 根据 f 在 U 上的单一性，可以断定

$$f(x)\neq f(a),\quad \forall x\in S.$$

因而

$$\inf_{x\in S}\{\|f(x)-f(a)\|\}=\mu>0.$$

再考察 $b=f(a)$ 的开邻域 $W=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \|y-b\|<\mu/2\}$．对任意取定的 $y\in W$, 定义这样一个函数

$$\begin{aligned}\psi:\ & U\to\mathbb{R}^n\\ & x\mapsto\|f(x)-y\|^2.\end{aligned}$$

因为对 $y\in W$ 有 $\|y-f(a)\|=\|y-b\|<\mu/2$, 所以对 $x\in S$, $y\in W$ 有

$$\|f(x)-y\|\geqslant\|f(x)-f(a)\|-\|y-f(a)\|>\mu-\mu/2=\mu/2.$$

于是对 $x\in S$ 有

$$\psi(x)=\|f(x)-y\|^2>\mu^2/4>\|f(a)-y\|^2=\psi(a).$$

由此可知: ψ 在 $\overline{B}$ 上的最小值只能在 $\overline{B}$ 内部的某点 c 取得，因而在该点有

$$\frac{\partial\psi(c)}{\partial x^k}=0,\quad k=1,\cdots,n.$$

也就是

$$(\alpha.1)\qquad \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f^j(c)}{\partial x^k}(f^j(c)-y^j)=0,\quad k=1,\cdots,n.$$

又因为

$$\det\left(\frac{\partial f^j(c)}{\partial x^k}\right)\neq 0,$$

所以由(α.1)可得

$$f^j(c)=y^j,\quad j=1,\cdots,n.$$

这就是说,对于任何 $y\in W$,存在 $c\in G$,使得 $f(c)=y$. □

α.4 逆函数定理 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射 $(r\geqslant 1)$, $a\in\Omega$. 如果 $\mathrm{D}f(a)$ 是可逆线性映射,那么存在 a 点的开邻域 U 和 $b=f(a)$ 点的开邻域 V,使得 f 限制到 U 上是从 U 到 V 的 C^r 同胚.

证明 先取 a 点的开邻域 $G\subset\Omega$,使得

$$\det(\mathrm{D}f(x))\neq 0,\quad \forall x\in G.$$

再取 a 点的开邻域 $U\subset G$ 如引理 α.2 中所述. 根据引理 α.2 和引理 α.3 我们有

(1) $f|U$ 是单映射;

(2) $V=f(U)$ 是 $b=f(a)$ 点的开邻域.

下面,我们来证明:

(3) $g=(f|U)^{-1}:V\to U$ 是 C^r 映射.

首先,将 $x'=g(y+\eta)$, $x=g(y)$ 代入引理 α.2 的不等式

$$\|f(x')-f(x)\|\geqslant\omega\|x'-x\|,$$

我们得到

$$\|g(y+\eta)-g(y)\|\leqslant\frac{1}{\omega}\|\eta\|. \tag{α.2}$$

这证明了逆映射 g 的连续性. 为了证明 g 的可微性,将利用如下的关系式:

$$\eta=f(g(y+\eta))-f(g(y)). \tag{α.3}$$

记 $A=\mathrm{D}f(g(y))$,利用微分的定义并注意到(α.2)和(α.3)式可得

$$\begin{aligned}&\eta-A(g(y+\eta)-g(y))\\&\quad=f(g(y+\eta))-f(g(y))-A(g(y+\eta)-g(y))\\&\quad=o(\|g(y+\eta)-g(y)\|)=o(\|\eta\|).\end{aligned}$$

由此得到

$$g(y+\eta)-g(y)-A^{-1}\eta=o(\|\eta\|).$$

这证明了逆映射 g 的可微性，并求出

$$\mathrm{D}g(y)=(\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}. \tag{α.4}$$

由于方阵取逆的运算是(任意阶)连续可微的，f 是 r 阶连续可微的($r\geqslant 1$)，g 是连续的，从(α.4)式可以看出 $\mathrm{D}g(y)$ 对 y 的连续性。这证明了 g 是 C^1 映射。

对于 $r>1$ 的情形，还须判断 g 的 k 阶连续可微性，这里 $1<k\leqslant r$. 事实上，从 $\mathrm{D}f$ 和 g 的 $k-1$ 阶连续可微性能够推断

$$\mathrm{D}g(y)=(\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}$$

的 $k-1$ 阶连续可微性，这就是 g 的 k 阶连续可微性． □

练　习　A

A.1. 以下这些集合视为 $\mathbb{R}^2$ 的子空间赋有相应的拓扑．试问能否赋予这些拓扑空间以微分结构而使它们成为微分流形?

(a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid xy=0\}$;

(b) $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|+|y|=1\}$;

(c) $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,\ y=\sin\dfrac{1}{x}\right\}$;

(d) $D=C\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=0,\ |y|\leqslant 1\}$.

A.2. 求证两个浸入的复合仍是一个浸入．

A.3. 设 M 是紧致微分流形，N 是连通微分流形，$f: M\to N$ 是一个淹没映射．试证 $f(M)=N$.

A.4. 对于紧致微分流形 M, 不存在从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的淹没映射．

A.5. 设 M 是紧致微分流形，$f: M\to\mathbb{R}$ 是可微映射．试证：至少存在 M 上的两个点 p 和 q, 使得 $(f_*)_p$ 和 $(f_*)_q$ 都是零映射．

A.6. 设 X, Y 和 Z 是微分流形，$f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 是可微映射．试证:

(1) 如果 $g\circ f$ 是浸入映射，那么 f 也是浸入映射;

(2) 如果 $g\circ f$ 是淹没映射并且 f 是满映射，那么 g 也是淹没映射.

A.7. 循以下线索可以作出代数基本定理的又一个"拓扑"证明.

(1) 设 $m\geqslant 1$, $g(z)$ 是 m 次复系数多项式. 试证: 如果 $g(z)$ 有根，那么它至多只有 m 个根. (请注意: 证明这一结论勿须引用代数基本定理.)

(2) 设 $n\geqslant 1$, $f(z)$ 是 n 次复系数多项式，则

$$K=\{z\in\mathbb{C}\mid f'(z)=0\}$$

是有限集合.

(3) $A=f(\mathbb{C}\setminus K)$ 和 $B=\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{C})$ 都是复平面 $\mathbb{C}$ 上的开集，并且 $A\cap B=\varnothing$.

(4) 记 $E=\mathbb{C}\setminus f(K)$, 则 $E\subset A\cup B$. 因为 E 是连通集合，所以必有以下两个论断之一成立:

$$\text{或者}\quad E\cap A=\varnothing,\quad\text{或者}\quad E\cap B=\varnothing.$$

(5) 试证 $E\cap A\neq\varnothing$, 因而只能有 $E\cap B=\varnothing$. 又因为 $B\subset E$, 所以 $B=B\cap E=\varnothing$. 由此得知 $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$.

A.8. 在 Milnor 所著的深受珍爱的小书《从微分观点看拓扑》的 §1 里，给出了代数基本定理的另一种"拓扑"证明. 请阅读该证明并弄清所有的细节.

A.9. 把所有的 $n\times m$ 实数矩阵组成的集合记为 $M(n,m)$. 我们可以将 $M(n,m)$ 等同于 $\mathbb{R}^{nm}$, 从而赋予它与 $\mathbb{R}^{nm}$ 相同的拓扑结构. 又设 $M(n,m;k)$ 是由全体秩为 k 的 $n\times m$ 实数矩阵组成的 $M(n,m)$ 的子集合. 试证 $M(n,m;k)$ 是 $M(n,m)$ 的正则子流形，并请计算 $M(n,m;k)$ 的维数.

第二章　第二可数性质，仿紧性质与单位分解

§1　第二可数性质

拓扑基　设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的一族开集．如果 X 的任何一个开集 G 都可以表示成 $\mathscr{B}$ 中某些开集的并集，即

$$G=\bigcup_{\substack{B\subset G\\ B\in\mathscr{B}}} B,$$

那么我们就说 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个**拓扑基**．

1.1 引理　设 X 是一个集合，G 是 X 的一个子集，$\mathscr{B}$ 是 X 的一族子集，则以下两个条件相互等价：

(1) 集合 G 可以表示成 $\mathscr{B}$ 中某些集合之并集；

(2) 对任何 $x\in G$，存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$.

证明　(1) $\Longrightarrow$ (2)　对任何

$$x\in G=\bigcup_{\substack{B\subset G\\ B\in\mathscr{B}}} B,$$

显然存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$.

(2) $\Longrightarrow$ (1)　设对任何 $x\in G$，存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$，则显然有

$$G\subset\bigcup_{x\in G} B_x\subset G,$$

因而有

$$G=\bigcup_{x\in G} B_x\ .\qquad\square$$

覆盖的细分关系（从属关系）　设 X 是一个集合，$\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是 X 的覆盖．若对任何一个 $V\in\mathscr{V}$ 存在 $W\in\mathscr{W}$，使得

$$V\subset W,$$

则称 $\mathscr{V}$ **细分** $\mathscr{W}$, 记为

$$\mathscr{V} \prec \mathscr{W}$$

(又称 $\mathscr{V}$ **从属于** $\mathscr{W}$).

拓扑空间 X 的任何一个拓扑基 $\mathscr{B}$ 当然都是 X 的一个开覆盖. 下面的命题则更值得我们注意.

1.2 命题 设 X 是一个拓扑空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的一个拓扑基, 则对 X 的任何一个开覆盖 $\mathscr{W}$, 存在 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \subset \mathscr{B}$, 使得

(1) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 仍是 X 的拓扑基(自然也是覆盖);

(2) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \prec \mathscr{W}$.

证明 我们定义

$$\mathscr{B}_{\mathscr{W}} = \{B \in \mathscr{B} \mid \exists\, W \in \mathscr{W}:\ B \subset W\}.$$

下面验证这样的 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 满足要求(1)和(2). 根据定义, (2)显然成立. 为了验证(1), 我们考察 X 的任意一个开集 G. 对任何 $x \in G$, 显然存在 $W \in \mathscr{W}$, 使得 $x \in G \cap W$; 因而又存在 $B \in \mathscr{B}$, 使得 $x \in B \subset G \cap W$. 显然有

$$B \in \mathscr{B}_{\mathscr{W}}, \quad x \in B \subset G.$$

这证明了 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 仍是 X 的拓扑基. □

第二可数空间 拓扑空间 X 被称为**第二可数空间**, 倘若它满足下面的**第二可数公理**:

(A_2) X 具有由可数个开集组成的拓扑基. (请注意, 这里和以后所说的"可数"均包括"有限"的情形, 更精确的说法是"至多可数".)

1.3 定理 (Lindelöf 定理) 第二可数空间 X 的任何一个开覆盖都含有可数子覆盖.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个可数的拓扑基, $\mathscr{W}$ 是 X 的一个开覆盖. 根据命题 1.2, 存在 $\mathscr{B}$ 的子族 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$, 使得

(1) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 覆盖 X;

(2) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \prec \mathscr{W}$.

$\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 作为 $\mathscr{B}$ 的子族自然仍是可数的. 不妨设

$$\mathscr{B}_{\mathscr{V}}=\{B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots\}.$$

由于 $\mathscr{B}_{\mathscr{V}}<\mathscr{W}$, 对每一个 $B_k\in\mathscr{B}_{\mathscr{V}}$, 存在 $W_k\in\mathscr{W}$, 使得 $B_k\subset W_k$. 于是 $\mathscr{W}$ 的可数子族

$$\mathscr{W}_0=\{W_1, W_2, \cdots, W_k, \cdots\}$$

仍是 X 的一个覆盖. □

1.4 定理 流形 M 为第二可数空间的必要充分条件是: 它具有由可数个局部坐标域构成的覆盖.

证明 "必要性"部分可引用定理 1.3 加以证明, 下面证明"充分性"部分.

充分性 每一局部坐标域 U 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $\varphi(U)$, 因而是第二可数的. 只须证明: 假如 M 能表示成可数个开集的并集

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k,$$

其中每个开集 U_k 都是第二可数的, 那么 M 本身是第二可数空间. 请读者自己验证这后一结论. □

在流形的定义中附加第二可数公理, 可以有效地排除一些"病态"情形的烦扰, 使我们的注意力能够集中于最重要、最有意义的情形. 因此, 我们作如下的约定.

重要约定 若无另外的说明, 以后行文中所提到的流形都认为是满足第二可数公理的.

§2 局部紧性质

局部紧空间 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间. X 被称为是**局部紧的**, 倘若对 X 的任意一点 p 和包含该点的任意开集 U, 存在这样的开集 V: V 的闭包 $\overline{V}$ 是紧致的, 并且满足条件

$$p\in V\subset\overline{V}\subset U.$$

换句话说, X 被称为是局部紧的, 倘若对任意的 $p\in X$ 和 p 点的任意开邻域 U, 存在 p 点的闭包为紧致集的开邻域 V, 使得 $\overline{V}\subset U$.

2.1 定理 流形是局部紧空间． □

2.2 定理 设 X 是第二可数的、局部紧 Hausdorff 拓扑空间，则存在可数个开集 $G_1, G_2, \cdots, G_k, \cdots$，满足以下条件：

(1) $\overline{G}_j$ 是紧致集，$j=1, 2, \cdots$；

(2) $\overline{G}_j \subset G_{j+1}$，$j=1, 2, \cdots$；

(3) $\bigcup\limits_j G_j = \bigcup\limits_j \overline{G}_j = X$.

证明 闭包紧致的开集组成 X 的一个覆盖，因而存在可数子覆盖．设

$$(*) \qquad W_1, W_2, \cdots, W_k, \cdots$$

是可数个闭包为紧致集的开集，它们覆盖了 X. 我们首先取 $G_1 = W_1$. 假定 G_{k-1} 已经选定，满足这样的条件：

(I_{k-1}) $\overline{G}_{k-1}$ 是紧致集，

(II_{k-1}) $W_{k-1} \subset G_{k-1}$.

我们从 (*) 中选取有限个开集，使得这些开集的并集 V_{k-1} 覆盖 $\overline{G}_{k-1}$. 然后命 $G_k = V_{k-1} \cup W_k$．显然 G_k 满足条件

(I_k) $\overline{G}_k$ 是紧致集，

(II_k) $\overline{G}_{k-1} \cup W_k \subset G_k$.

用这样的方式选取的可数个开集

$$G_1, G_2, \cdots, G_k, \cdots,$$

满足条件：

(1) $\overline{G}_k$ 是紧致集，$k=1, 2, \cdots$；

(2) $\overline{G}_{k-1} \subset G_k$，$k=2, 3, \cdots$；

(3) $X \subset \bigcup\limits_k W_k \subset \bigcup\limits_k G_k \subset \bigcup\limits_k \overline{G}_k \subset X$. □

2.3 注记 如果拓扑空间 X 可以表示成可数个紧致集的并集，那么我们就说 X 是 σ 紧的．根据定理 2.2，任何（满足第二可数公理的）流形都是 σ 紧的．

§3 仿紧性质

局部有限性与仿紧性 （Ⅰ）设 X 是一个拓扑空间．我们说 X 的一个子集族 $\mathscr{W}$ 是**局部有限**的，倘若对任何 $p\in X$，存在 p 点之开邻域 U，使得 U 只与 $\mathscr{W}$ 中的有限个集合 W 相交(即：仅有限个 $W\in\mathscr{W}$ 能使 $U\cap W\neq\varnothing$).

（Ⅱ）设 X 是拓扑空间，满足 Hausdorff 分离公理．空间 X 被称为是**仿紧**的，倘若对于 X 的任何开覆盖 $\mathscr{V}$，都存在 X 的局部有限的开覆盖 $\mathscr{W}$，使得 $\mathscr{W}<\mathscr{V}$.

记号约定 我们约定以 B_ρ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中以原点为中心，以 ρ 为半径的开球．这就是说，约定记

$$B_\rho:=\{x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m\mid x_1^2+\cdots+x_m^2<\rho^2\}.$$

3.1 定理 设 M 是一个(满足第二可数公理的)流形．则对于 M 的任何一个开覆盖 $\mathscr{Q}$，存在 M 的可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i, W_i，使得

$$W_i\subset V_i\subset U_i;\quad i=1,2,\cdots,$$

并且满足条件：

(1) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族，$\mathscr{U}<\mathscr{Q}$；

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3$, $\varphi_i(V_i)=B_2$, $\varphi_i(W_i)=B_1$, $i=1,2,\cdots$；

(3) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖 M.

证明 取可数个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_h,\cdots$ 满足定理 2.2 的要求．记 $G_{-1}=G_0=\varnothing$．显然 $\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$ 是紧致集，$G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2}$ 是开集，并且

$$\overline{G}_h\backslash G_{h-1}\subset G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2}.$$

对任意的 $p\in\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$，存在 $Q\in\mathscr{Q}$，使得 $p\in Q$．因而存在 M 的局部坐标图卡 (U,φ)，满足这样的条件：

(i) $p\in U\subset(G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2})\cap Q$；

(ii) $\varphi(p)=0,\ \varphi(U)=B_3$.

我们记

$$V=\varphi^{-1}(B_2),\quad W=\varphi^{-1}(B_3).$$

因为$\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$是紧致集，所以存在有限个点 $p_{(h,1)}, p_{(h,2)}, \cdots, p_{(h,k_h)}$，使得相应的 $W_{(h,1)}, W_{(h,2)}, \cdots, W_{(h,k_h)}$ 覆盖$\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$. 只须取

$$\mathscr{U}=\{U_{(1,1)},\cdots,U_{(1,k_1)};\ U_{(2,1)},\cdots,U_{(2,k_2)};\cdots\},$$

$$\mathscr{V}=\{V_{(1,1)},\cdots,V_{(1,k_1)};\ V_{(2,1)},\cdots,V_{(2,k_2)};\cdots\},$$

$$\mathscr{W}=\{W_{(1,1)},\cdots,W_{(1,k_1)};\ W_{(2,1)},\cdots,W_{(2,k_2)};\cdots\},$$

就可满足条件：

(1) $\mathscr{U}$是局部有限族，$\mathscr{U}<\mathscr{O}$;

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1,\ i=1,2,\cdots$;

(3) $\mathscr{W}$ 覆盖 M.

以上这些条件中，只有 $\mathscr{U}$的局部有限性质尚须验证．为了验证局部有限性，我们考察 M 的任意一点 p. 可设 $p\in G_r$. 容易看出：p 点的开邻域 G_r 仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个集合相交，

$$G_r\cap U_{(i,j)}=\varnothing,\quad \forall i\geqslant r+2,\ 1\leqslant j\leqslant k_i. \qquad \square$$

3.2 推论 (满足第二可数公理的)流形是仿紧的．

§4 单位分解

4.1 引理 设 ζ 是这样定义的实函数：

$$\zeta(t)=\begin{cases}e^{-1/t}, & 对于\ t>0,\\ 0, & 对于\ t\leqslant 0,\end{cases}$$

则 $\zeta\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$．

4.2 引理 设 η 是这样定义的函数：

$$\eta(x)=\frac{\zeta(4-r^2)}{\zeta(4-r^2)+\zeta(r^2-1)},$$

其中 ζ 是引理 4.1 中的那个函数，

$$x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m,\quad r=\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_m^2}\ .$$

则 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R}^m,\ \mathbb{R})$，并且满足以下条件：

$$\begin{cases}\eta(x)=1, & \text{对于 } \|x\|=r\leqslant 1,\\ 0<\eta(x)<1, & \text{对于 } 1<r<2,\\ \eta(x)=0, & \text{对于 } \|x\|=r\geqslant 2,\\ \eta(-x)=\eta(x), & \text{对于任意的 } x\in\mathbb{R}^m.\end{cases}$$

4.3 引理 设 M 是光滑流形，p 是 M 的任意一点，(U,φ) 是 M 的局部坐标图卡，V 和 W 是 M 中的开集，并设

$$p\in W\subset\overline{W}\subset V\subset\overline{V}\subset U,$$

$$\varphi(p)=0,\quad \varphi(W)=B_1,\quad \varphi(V)=B_2,\quad \varphi(U)=B_3,$$

则存在 $\eta\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足条件：

$$\begin{cases}\eta(q)=1, & \text{对于 } q\in\overline{W},\\ 0<\eta(q)<1, & \text{对于 } q\in V\setminus\overline{W},\\ \eta(q)=0, & \text{对于 } q\in M\setminus V.\end{cases}$$

记号约定 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 是 C^k 函数 $(k\geqslant 0)$，我们约定记

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{q\in M\mid f(q)\neq 0\}}\ ,$$

并把它称为函数 f 的**支集**．若 $\operatorname{supp} f$ 是紧致的，则称 f 为**紧支函数**．定义于 M 上的全体紧支 C^k 函数的集合记为 $C_c^k(M,\mathbb{R})$．特别地，全体紧支光滑函数的集合记为 $C_c^\infty(M,\mathbb{R})$．

4.4 定理（单位分解或 1 的分解(Partition of unity)**）** 设 M 是光滑流形，$\mathscr{O}$ 是 M 的任意一个开覆盖，则存在可数个

$$\lambda_i\in C_c^\infty(M,\mathbb{R}),\quad i=1,2,\cdots,$$

适合条件：

(1) $\{\operatorname{supp}\lambda_i\}<\mathscr{O}$；

(2) $\{\operatorname{supp}\lambda_i\}$ 是局部有限族；

(3) $\lambda_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots$，并且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i\equiv 1$.

证明 取 (U_i,φ_i)，V_i 和 $W_i\,(i=1,2,\cdots)$ 如定理 3.1 中所述．然后取 $\eta_i\in C_c^\infty(M,\mathbb{R})\ (i=1,2,\cdots)$，适合这样的条件：

$$\begin{cases} \eta_i(q)=1, & \forall q\in\overline{W}_i, \\ 0<\eta_i(q)<1, & \forall q\in V_i\setminus\overline{W}_i, \quad i=1,2,\cdots. \\ \eta_i(q)=0, & \forall q\in M\setminus V_i, \end{cases}$$

因为 $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j<+\infty .$$

又因为 $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j\geqslant 1.$$

我们定义

$$\lambda_i=\eta_i\Big/\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j,\quad i=1,2,\cdots.$$

很容易验证：这样定义的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，满足定理的全部要求． □

4.5 注记 通常把满足上面定理的要求(1)—(3)的紧支光滑函数族$\{\lambda_i\}$叫做**从属于覆盖 $\mathscr{O}$ 的单位分解**．

4.6 推论 设 M 是光滑流形，F 是 M 的非空闭子集，G 是 M 的开集，$F\subset G$．则存在 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，使得

$$F\subset\{p\in M\,|\,g(p)=1\}\subset\operatorname{supp}g\subset G.$$

若 F 是紧致集，则还可要求 $g\in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$．

证明 记 $H=M\setminus F$，则 $\mathscr{O}=\{G,H\}$ 是 M 的开覆盖．根据定理4.4，存在从属于 $\mathscr{O}=\{G,H\}$ 的单位分解$\{\lambda_i\}$．我们定义

$$g=\sum_{\operatorname{supp}\lambda_i\subset G}\lambda_i,$$

则有

$$F=M\setminus H\subset\{p\in M\,|\,g(p)=1\}\subset\operatorname{supp}g\subset G.$$

若 F 是紧致集，则存在 M 的开集 G_0，它的闭包$\overline{G}_0$是紧致的，并且满足条件

$$F\subset G_0\subset\overline{G}_0\subset G.$$

以 G_0 代替 G，重复上面的讨论(或利用上面的结论)，可以得到函

数 $g_0 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，满足这样的条件：

$$F \subset \{p \in M \mid g_0(p) = 1\} \subset \operatorname{supp} g_0 \subset G_0.$$

因为$\overline{G}_0$是紧致的，所以有 $g_0 \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$． □

4.7 推论 设$\{G_i\}$是 M 的局部有限的开集族，K_i 是紧致集，$K_i \subset G_i$，并且

$$\bigcup_i K_i = M.$$

则存在$\{v_i\} \subset C_c^\infty(M, \mathbb{R})$，满足条件：

(1) $0 \leqslant v_i \leqslant 1,\ \sum_i v_i \equiv 1$;

(2) $K_i \subset \operatorname{supp} v_i \subset G_i$．

证明 根据推论 4.6，存在 $\mu_i \in C_c^\infty(M, \mathbb{R})$，使得

$$K_i \subset \{p \in M \mid \mu_i(p) = 1\} \subset \operatorname{supp} \mu_i \subset G_i.$$

因为$\{G_i\}$是局部有限族，所以

$$\sum_j \mu_j < +\infty .$$

又因为$\{K_i\}$覆盖了 M，所以

$$\sum_j \mu_j \geqslant 1.$$

我们定义

$$v_i = \mu_i \Big/ \sum_j \mu_j$$

则易验证：$\{v_i\}$满足全部要求． □

§5 紧流形嵌入 Euclid 空间

5.1 定义 设 M 和 N 是 C^r 流形，$f: M \to N$ 是 C^r 映射，并赋予 $f(M)$ 作为 N 的子空间的拓扑．如果 $f: M \to N$ 是 C^r 浸入，并且 f 是从 M 到 $f(M)$ 的一个同胚映射，那么就称 $f: M \to N$ 是一个 C^r **嵌入**．C^∞ 嵌入又称**光滑嵌入**．

5.2 定理 设 M 是紧致光滑流形，则存在光滑嵌入映射

$$f: M \to \mathbb{R}^L,$$

其中 L 是一个足够大的自然数．(以后我们将看到，$L=2\dim M+1$ 就足够了．但这里的证明可能要求更大的 L.)

证明 对于每一点 $p\in M$，存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ)，使得

$$\varphi(p)=0, \quad \varphi(U)=B_3.$$

我们引入记号

$$V=\varphi^{-1}(B_2), \quad W=\varphi^{-1}(B_1).$$

由于 M 的紧致性，可以选择有限个这样的局部坐标图卡 (U_1,φ_1)，$\cdots,(U_k,\varphi_k)$，使得相应的 $W_1,\cdots,W_k$ 覆盖了 M．根据引理 4.3，存在 $\eta_i\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足条件：

$$\begin{cases} \eta_i(q)=1, & \forall q\in \overline{W}_i, \\ 0<\eta_i(q)<1, & \forall q\in V_i\setminus\overline{W}_i, \\ \eta_i(q)=0, & \forall q\in M\setminus V_i. \end{cases}$$

设 $\dim M=m$．我们取 $L=km+k=k(m+1)$，并作这样一个映射

$$f: M \to \mathbb{R}^L,$$

其定义为

$$f(q)=(\eta_1(q)\varphi_1(q),\cdots,\eta_k(q)\varphi_k(q);\ \eta_1(q),\cdots,\eta_k(q)),$$

其中对 $\eta_i(q)\varphi_i(q)$ 的定义作了这样的扩充：规定

$$\eta_i(q)\varphi_i(q)=0, \quad \forall q\in M\setminus V_i.$$

显然 $f: M\to \mathbb{R}^L$ 是光滑映射．下面我们将证明：

（Ⅰ）f 在每一点 $p\in M$ 都是浸入；

（Ⅱ）f 是单映射．

首先，对任意的 $p\in M$，存在上面取定的某个 W_i，使得 $p\in W_i$．在 p 点的开邻域 W_i 上，$f(q)$ 的分量中的一部分恰好是

$$\eta_i(q)\varphi_i(q)=\varphi_i(q),$$

因而 f 的局部表示 $\tilde{f}=f\circ\varphi_i^{-1}$ 具有这样的形状

$$\tilde{f}(x_1,\cdots,x_m)=(***,x_1,\cdots,x_m,****).$$

据此容易证明：f在 p 点是浸入.

其次，设 $q', q \in M$，使得 $f(q') = f(q)$. 则有

$$\eta_i(q') = \eta_i(q), \quad i = 1, \cdots, k.$$

设 $q \in W_j$，则 $\eta_j(q) = 1$，因而 $\eta_j(q') = 1$. 这说明 $q' \in \overline{W_j}$. 限制在$\overline{W_j}$，考察 f 的分量，可以得到

$$\eta_j(q')\varphi_j(q') = \eta_j(q)\varphi_j(q), \quad \varphi_j(q') = \varphi_j(q).$$

但在 $V_j \supset \overline{W_j}$ 上 φ_j 是同胚映射，因而必有 $q' = q$. 以上讨论证明了

$$f(q') = f(q) \Longrightarrow q' = q,$$

即 f 是单映射.

我们看到 $f: M \to \mathbb{R}^L$ 是一个单一的光滑的浸入. 点集拓扑学中有这样一个定理：紧空间映入 Hausdorff 空间的单一连续映射必为到其像集的同胚映射. 根据这一定理，我们可以断定：f 是从 M 到 $f(M) \subset \mathbb{R}^L$ 的同胚映射. 这就最后完成了定理的证明. □

练　习　B

B.1. 试证下列空间（赋以通常的拓扑）都是第二可数空间：

(a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{R}^m$; (c) $\mathbb{R}^m$ 的开子集.

B.2. 设拓扑空间 M 可以表示成可数个开集的并集：

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k,$$

并且每个开集 U_k（赋以 M 的子空间拓扑）都是第二可数空间. 求证 M 是第二可数空间.

B.3. 试证：(a) 第二可数空间的子空间是第二可数空间；

(b) 局部紧致空间的闭子空间是局部紧致空间；

(c) 仿紧空间的闭子空间是仿紧空间.

B.4. 设 M 是光滑流形（假定 M 满足第二可数公理），A 和 B 是 M 的两个不相交的闭子集. 试证存在 $\psi \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$，满足以下要求：

(1) $0 \leqslant \psi(p) \leqslant 1, \quad \forall p \in M$;

(2) $\psi(p)=1, \quad \forall p \in A$;

(3) $\psi(p)=0, \quad \forall p \in B$.

B.5. 众所周知，圆周 S 是一维流形，并且能够很好地嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 之中．现在，请你给出圆周 S 的由两个图卡组成的图汇，然后仿照定理 5.2 的证明，设法将 S 嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中去(可以设法使所嵌入的空间比定理 5.2 的证明中所要求的维数低一维)．还请你描绘出用这种办法将 S 嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的大致图形．通过这一练习，你能够凭借几何直观加强对定理 5.2 及其证明的理解．

B.6. 设 M 是光滑流形，$\{K_i\}$ 是 M 的一个紧致集族，$\{V_i\}$ 是 M 的一个局部有限的开集族，$K_i \subset V_i$, $i=1,2,\cdots$，并且

$$\bigcup_i K_i = M.$$

则对任意给定的一族正实数 $\{\varepsilon_i\}$，存在光滑函数 $\varepsilon: M \to \mathbb{R}$，适合条件

$$0<\varepsilon(p) \leqslant \varepsilon_i, \quad \forall p \in K_i, \ i=1,2,\cdots.$$

提示　可按以下线索作出证明：

(a) 必要时缩小 V_i，可设各个 $\overline{V}_i$ 都是紧致的；

(b) 根据推论 4.7，存在 $\{v_i\} \subset C^{\infty}(M, \mathbb{R})$，适合条件：

(1) $0 \leqslant v_i \leqslant 1, \quad \sum_i v_i \equiv 1$,

(2) $K_i \subset \{p \in M | v_i(p)>0\} \subset \operatorname{supp} v_i \subset V_i$;

(c) 对于任意取定的 j，证明 $\lambda_j = \inf\{\varepsilon_i | \overline{V}_i \cap \overline{V}_j \neq \varnothing\} > 0$.

(d) 验证如下定义的光滑函数 ε 适合题目的要求：

$$\varepsilon(p)=\sum_j \lambda_j v_j(p).$$

B.7. 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集．试证存在 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，适合条件

(1) $f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;

(2) $f^{-1}(0)=F$.

(提示：可参看文献[Go], p.17.)

第三章 Whitney 嵌入定理

§1 零 测 集

1.1 定义 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, $i=1,\cdots,m$. 我们称 $\mathbb{R}^m$ 的子集

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_m,b_m)$$

为 m 维**开长方块**(或**开长方体**),并将其体积定义为

$$|I|=\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i).$$

I 的闭包 $\bar{I}$ 被称为**闭长方块**(或**闭长方体**). 闭长方块 $\bar{I}$ 的体积定义为

$$|\bar{I}|=|I|.$$

1.2 定义 集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ 被称为**零测集**,倘若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在(至多)可数个 m 维开长方块 $I_1, I_2, \cdots$, 使得

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<\varepsilon.$$

1.3 注记 将定义 1.2 中所提到的"开长方块"统统换成"开正方块",所得到的陈述与原定义等价. 为说明这一事实,只须指出: $\mathbb{R}^m$ 中的任何一个开长方块 I 可以被体积之和不超过 $2^m|I|$ 的一些开正方块所覆盖.

证明 不妨设

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_m,b_m);\quad b_i-a_i=l_i,\quad i=1,2,\cdots,m;$$

$$l=\min\{l_i|1\leqslant i\leqslant m\};\qquad l_i=q_i\frac{l}{2}+r_i,$$

其中

$$q_i\in\mathbb{N},\ 0\leqslant r_i<\frac{l}{2},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

开长方块 I 为以下这些开正方块所覆盖:

$$J_{(j_1,\cdots,j_m)}=\left(a_1+\frac{j_1-1}{2}l,\ a_1+\frac{j_1+1}{2}l\right)\times\cdots\times\left(a_m+\frac{j_m-1}{2}l,\ a_m+\frac{j_m+1}{2}l\right),$$

$$j_i\in\{1,\cdots,q_i\},\quad i=1,\cdots,m.$$

这些开正方块总共有 $q_1q_2\cdots q_m$ 个，每个开正方块的体积都是 l^m. 它们的体积之和

$$q_1q_2\cdots q_m l^m\leqslant 2^m l_1l_2\cdots l_m=2^m|I|.\qquad\Box$$

零测集的子集(显然)仍是零测集．还容易证明:

1.4 命题 如果 $E\subset\mathbb{R}^m$ 能被(至多)可数个零测集 $E_1, E_2,\cdots$ 所覆盖，即

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\quad(E_i\text{ 是零测集}, i=1,2,\cdots),$$

那么 E 也是零测集．

1.5 命题 为使 $E\subset\mathbb{R}^m$ 是零测集，必须而且只须对任何 $x\in E$, 存在 x 点的开邻域 V, 使得 $E\cap V$ 是零测集．

证明 “必要性”是显然的，下面证明“充分性”．

对每一点 $x\in E$, 存在该点的开邻域 U_x, 使得 $E\cap U_x$ 是零测集．我们记

$$\mathscr{U}=\{U_x\,|\,x\in E\}.$$

因为 $U=\bigcup\limits_{x\in E}U_x$ 作为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间是第二可数的，所以存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族

$$\mathscr{U}_0=\{U_1, U_2,\cdots\}\subset\mathscr{U}$$

仍然能覆盖 U. 因为 $E\cap U_i$ 是零测集 $(i=1,2,\cdots)$, 所以

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap U_i)$$

也是零测集．　$\Box$

下面将证明: 如果 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$, 那么 f 将 U 中的零测集仍映成($\mathbb{R}^m$ 中的)零测集．讨论中将引用这样的记号 $|x|$: 对于 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, 我们约定记

$$|x|:=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|x_i|\}.$$

1.6 引理 $\mathbb{R}^m$ 中的任何非空开集 U 都可以表示成可数个闭长方块之并集:

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{I}_i.$$

1.7 引理 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $\overline{I}$ 是包含于 U 中的闭长方块, $f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$. 则 f 在 $\overline{I}$ 上满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\quad \forall x,y\in\overline{I},$$

其中 L 是非负实数.

1.8 命题 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的非空开集, $E\subset U$ 是零测集, $f\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$, 则 $f(E)$ 也是零测集.

证明 如前所述, U 可以表示成可数个闭长方块的并集:

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{I}_i.$$

我们记 $E_i=E\cap\overline{I}_i,\ i=1,2,\cdots$. 则有

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i;\quad E_j\subset\overline{I}_j,\quad j=1,2,\cdots.$$

因为 f 在 $\overline{I}_i$ 上满足 Lipschitz 条件, 所以 $f(E_i)$ 是零测集 ($i=1,2,\cdots$), 因而 $f(E)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f(E_i)$ 也是零测集. □

1.9 定义 设 M 是微分流形, $\dim M=m$. 集合 $E\subset M$ 被称为**零测集**, 倘若 M 的任何一个局部坐标图卡 (U,φ) 都使得 $\varphi(U\cap E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集.

显然零测集的子集仍是零测集; 至多可数个零测集的并集也仍是零测集.

1.10 命题 设 M 是微分流形, $\dim M=m$. 为使 $E\subset M$ 是零测集, 必须而且只须: 对任意的 $p\in E$, 存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ), 使得 $\psi(V\cap E)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集.

证明 条件的必要性是显然的，下面证明条件的充分性．

设对所有的 $p \in E$，都有命题中所述的那种局部坐标域 $V=V_p$．约定记

$$\mathscr{V}=\{V_p \mid p\in E\}, \quad W=\bigcup_{p\in E} V_p .$$

因为 W 作为第二可数空间 M 的子空间是第二可数的，所以存在 $\mathscr{V}$ 的至多可数的子族 $\mathscr{V}_0=\{V_1, V_2, \cdots\}$，使得 $\mathscr{V}_0$ 仍然覆盖住 W.

对于 M 的任意一个局部坐标图卡 (U, φ)，我们有

$$\varphi(U\cap E)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(U\cap V_i\cap E)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\varphi\circ\psi_i^{-1})(\psi_i(U\cap V_i\cap E)).$$

因为 $\psi_i(U\cap V_i\cap E)\subset\psi_i(V_i\cap E)$ 是零测集，$\psi_i(U\cap V_i\cap E)$ 包含在开集 $\psi_i(U\cap V_i)$ 中，并且

$$\varphi\circ\psi_i^{-1}\in C^1(\psi_i(U\cap V_i), \mathbb{R}^m),$$

所以 $\varphi\circ\psi_i^{-1}(\psi_i(U\cap V_i\cap E))$ 是零测集 $(i=1, 2, \cdots)$．由此得知 $\varphi(U\cap E)$ 是零测集． □

在下面的讨论中，将用到关于集合与映射的这样一件事实：

设 X 和 Y 是集合，$f: X\to Y$ 是一个映射，$A\subset X$, $B\subset Y$．则有

$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B.$$

请读者自行验证这一关系（练习 C. 6）．

1.11 命题 设 M 和 N 是微分流形，$\dim M=\dim N=m$, $f\in C^1(M, N)$．如果 $E\subset M$ 是零测集，那么 $f(E)\subset N$ 也是零测集．

证明 取可数个 M 的图卡 (U_i, φ_i)，使得 $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 覆盖 M．记 $E_i=U_i\cap E$ $(i=1, 2, \cdots)$．只须证明每个 $f(E_i)$ 都是 N 中的零测集．为此，考察任意一点 $q\in N$ 和 q 点邻近的 N 的任意一个局部坐标图卡 (V, ψ)．记 $W_i=f^{-1}(V)\cap U_i$（这里 $f^{-1}(V)$ 是集合 V 关于映射 f 的原像集）．则有

$$\begin{aligned}\psi(V\cap f(E_i))&=\psi\circ f(f^{-1}(V)\cap E_i)=\psi\circ f(f^{-1}(V)\cap U_i\cap E)\\&=\psi\circ f(W_i\cap E)=\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}(\varphi_i(W_i\cap E)).\end{aligned}$$

因为 $\varphi_i(W_i\cap E)$ 是零测集，并且

$$\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}\in C^1(\varphi_i(W_i),\mathbb{R}^m),$$

所以 $\psi(V\cap f(E_i))=\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}(\varphi_i(W_i\cap E))$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零测集． □

1.12 定理（弱 Sard 定理） 设 M 和 N 是微分流形，$\dim M<\dim N$, $f\in C^1(M,N)$, 则 $f(M)$ 是 N 中的零测集．

证明 设 $\dim M=m$, $\dim N=n$. 定义乘积流形 $L=M\times\mathbb{R}^{n-m}$ 和映射

$$F: L=M\times\mathbb{R}^{n-m}\to N,$$
$$(p,\zeta)\mapsto f(p).$$

显然有 $\dim L=\dim N=n$. 因为 $M\times\{0\}$ 是 $L=M\times\mathbb{R}^{n-m}$ 中的零测集，并且 $F\in C^1(L,N)$, 所以

$$F(M\times\{0\})=f(M)$$

是 N 中的零测集． □

§2 Whitney 浸入定理

由全体 $n\times m$ 矩阵组成的集合 $M(n,m)$, 可等同于 $\mathbb{R}^{nm}$ 而赋以相应的拓扑．我们来考察空间 $M(n,m)$ 中由全体秩为 k 的矩阵组成的子空间 $M(n,m,k)$.

2.1 引理 空间 $M(n,m)$ 中全体秩为 k 的矩阵组成的子空间 $M(n,m,k)$ 可赋予 C^∞ 结构而成为一个维数为 $nm-(n-k)(m-k)$ 的 C^∞ 流形．

证明 左上角的 $k\times k$ 子阵非退化的全体 $n\times m$ 矩阵组成空间 $M(n,m)$ 的一个开集合 G_0. 记 $U_0=G_0\cap M(n,m,k)$, 则任何一个 $X\in U_0$ 可以写成

$$X=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{matrix} \}k \\ \}n-k\end{matrix},\quad \det A\neq 0.$$
$$\qquad\underbrace{\quad}_{k}\ \underbrace{\quad}_{m-k}$$

以满秩 $n\times n$ 方阵

$$L=\left[\begin{array}{c:c} I_{k\times k} & 0 \\ \hdashline -CA^{-1} & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{array}\right]$$

左乘 X 得到

$$LX=\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & D-CA^{-1}B \end{array}\right].$$

因为 $\operatorname{rank}(LX)=\operatorname{rank}X=k$，所以必有

$$D-CA^{-1}B=0,\quad D=CA^{-1}B.$$

这说明 X 的各子块中，只有 A, B, C 这三个子块是独立的，第四个子块 D 完全由前三个子块决定．我们可以选取 A, B 和 C 这三个子块的分量（共计 $nm-(n-k)(m-k)$ 个分量）作为 U_0 中矩阵的局部坐标．如果定义

$$\varphi_0\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

那么 (U_0, φ_0) 就是 $M(n, m, k)$ 的一个图卡．

对一般的 $X_1\in M(n, m, k)$，存在 $n\times n$ 置换阵 P_1 和 $m\times m$ 置换阵 Q_1，使得 $P_1X_1Q_1$ 的左上角的 $k\times k$ 子阵非退化，即使得 $P_1X_1Q_1\in U_0$．考察 $M(n, m, k)$ 的开集

$$U_1=P_1^{-1}U_0Q_1^{-1}.$$

在这开集上可以定义局部坐标

$$\varphi_1(X_1)=\varphi_0(P_1X_1Q_1).$$

于是 (U_1, φ_1) 也成为 $M(n, m, k)$ 的一个图卡．

这样，$M(n, m, k)$ 为有限个开集 $U_0, U_1, \cdots, U_{l-1}$ 所覆盖，其中

$$l=\binom{n}{k}\binom{m}{k}.$$

在 U_i 上我们定义局部坐标 $\varphi_i(X)=\varphi_0(P_iXQ_i)$. 如果 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, 那么$\varphi_i$与$\varphi_j$之间的坐标变换为

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\right)=\varphi_0\left(P_jP_i^{-1}\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix}Q_i^{-1}Q_j\right).$$

这显然是 C^∞ 映射. □

2.2 命题 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $n\geqslant 2m$, $f\in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$. 则对任给的正实数 γ, 存在 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})$, 满足条件

$$|A|=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}<\gamma,$$

使得

$$g(x)=f(x)+Ax$$

在 U 上是浸入.

证明 对于待定的 $A\in M(n,m)$, 考察映射 $g(x)=f(x)+Ax$. 要使 g 为浸入, A 应选择使得 $\mathrm{D}g(x)=\mathrm{D}f(x)+A$ 的秩不小于 m. 换句话说, 我们希望选择 A 使得

$$\mathrm{D}f(x)+A\notin M(n,m,k),\quad \forall x\in U,\quad k<m.$$

也就是

$$A\neq B-\mathrm{D}f(x),\quad \forall B\in M(n,m,k),\quad k=0,1,\cdots,m-1,\quad x\in U.$$

为此, 对于 $k<m$, 考察这样的映射

$$\begin{aligned}\psi_k: M(n,m,k)\times U &\to M(n,m)\\ (B,x)&\mapsto B-\mathrm{D}f(x).\end{aligned}$$

因为 $n\geqslant 2m$,

$$\begin{aligned}nm-(n-k)(m-k)+m &\leqslant nm-[n-(m-1)][m-(m-1)]+m\\ &=nm-(n-2m)-1\leqslant nm-1,\end{aligned}$$

$$\dim(M(n,m,k)\times U)<\dim M(n,m),$$

所以 $\psi_k(M(n,m,k)\times U)$ 应是 $M(n,m)$ 中的零测集. 我们可以在

$$M(n,m)\Big\backslash\bigcup_{k=0}^{m-1}\psi_k(M(n,m,k)\times U)$$

之中选择 A, 满足条件 $|A|<\gamma$. 这样选择的 A 就使得

$$\mathrm{D}f(x)+A\notin M(n,m,k),\quad \forall x\in U,\quad k<m.$$

映射 $g(x)=f(x)+Ax$ 使得

$$\mathrm{D}g(x)=\mathrm{D}f(x)+A\notin M(n,m,k),\quad \forall x\in U,\quad k=0,1,\cdots,m-1.$$

因而 g 在 U 上是浸入． □

设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，K 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致集，$K\subset U$. 考察映射 $f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$. 设对于 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in U$ 有

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))=(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m)).$$

我们约定记：

$$|f|_K^{(0)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in K}\{|f_i(x)|\},$$

$$|f|_K^{(1)}=\max\left\{|f|_K^{(0)},\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_K^{(0)},\cdots,\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_K^{(0)}\right\}.$$

2.3 命题 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，K 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致集，$K\subset U$. 如果 $f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ 在 K 上是浸入，那么存在 $\delta>0$, 使得对任何

$$g\in C^1(U,\mathbb{R}^n),\quad |g-f|_K^{(1)}<\delta,$$

都有：g 在 K 上是浸入．

证明 对于 $g\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $x\in U$, 我们定义

$$\Delta(g,x)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_{i_1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g_{i_1}}{\partial x_m}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_{i_m}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial g_{i_m}}{\partial x_m}(x)\end{vmatrix}^2.$$

因为 $\qquad \mathrm{rank}\,\mathrm{D}f(x)=m,\quad \forall x\in K,$

所以有 $\qquad \Delta(f,x)>0,\quad \forall x\in K.$

于是，存在 $\delta>0$, 使得只要 $g\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, $|g-f|_K^{(1)}<\delta$, 也就有

$$\Delta(g,x)>0,\quad \forall x\in K.\quad \square$$

2.4 命题 设 M 是光滑流形，$\dim M=m$, $n\geqslant 2m$, 并设

(i) $H\subset M$ 是闭集，$f\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 在 H 上是浸入；

(ii) (U,φ) 是 M 的图卡，$\varphi(U)=B_3$（我们约定记：$V=\varphi^{-1}(B_2)$, $W=\varphi^{-1}(B_1)$）；

(iii) ε 是任意给定的正实数，

则存在 $g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$，满足条件：

(1) $g(p)=f(p),\ \forall p\in M\setminus V$;

(2) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上是浸入；

(3) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\ \forall p\in M$.

(其中的 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的 Euclid 范数.)

证明 考察紧致集

$$K=H\cap\overline{V}\subset U$$

和映射

$$\widetilde{f}=f\circ\varphi^{-1}\in C^{\infty}(\varphi(U),\mathbb{R}^n).$$

根据命题 2.3，存在 $\delta>0$，使得只要 $|\widetilde{g}-\widetilde{f}|^{(1)}_{\varphi(K)}<\delta$，就能保证 $\widetilde{g}$ 在 $\varphi(K)$ 上是浸入.

选取 $\eta\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall p\in V\setminus\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall p\in M\setminus V.\end{cases}$$

在 $\varphi(U)=B_3$ 上，对映射 $\widetilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ 用命题 2.2，可知存在任意小的 $A\in M(n,m)$，使得 $\widetilde{f}(x)+Ax$ 是从 $\varphi(U)=B_3$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的浸入. 我们定义

$$g(p)=f(p)+\eta(p)A\varphi(p).$$

这里同以前一样补充规定

$$\eta(p)A\varphi(p)=0,\quad \forall p\in M\setminus V.$$

局部看来

$$\widetilde{g}(x)=g\circ\varphi^{-1}(x)=\widetilde{f}(x)+\eta(\varphi^{-1}(x))Ax.$$

只要 A 选取得充分小，当然可使 $|\widetilde{g}-\widetilde{f}|^{(1)}_{\varphi(K)}<\delta$.

考察 g 的构造，容易得出以下这些结论：

(1) $g(p)=f(p),\quad \forall p\in M\setminus V$.

(2) 在 $K=H\cap\overline{V}$ 上 g 是浸入，在 $H\setminus\overline{V}$ 上，$g=f$ 当然也是浸入，因而 g 在 H 上是浸入. 另一方面，在 $\overline{W}$ 上，g 的局部表示为 $\widetilde{g}(x)=\widetilde{f}(x)+Ax$，因而 g 在 $\overline{W}$ 上是浸入. 于是，g 在 $H\cup\overline{W}$ 上是浸入.

(3) 只要 A 选择得足够小，当然可使

$$\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\quad \forall p\in M. \qquad \square$$

2.5 定理(Whitney 浸入定理) 设 M 是 C^∞ 流形，$\dim M=m$，$n\geqslant 2m$．则对任何 $f\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 和任何 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$，使得

(1) g 是从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的浸入；

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\ \forall p\in M$.

(对于给定的 $n\geqslant 2m$，一定存在 $f\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$，例如：$f\equiv 0$．由此得知，任何 m 维光滑流形 M 都可以光滑地浸入到 $2m$ 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{2m}$ 中去．)

证明 取 M 的可数个局部坐标图卡$\{(U_i,\varphi_i)\}$和开集

$$V_i,\ W_i\subset U_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

满足这样的条件：

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限的；

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1,\ i=1,2,\cdots$;

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖 M.

我们归纳构造一列映射$\{f_i\}\subset C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$．首先，取 $f_{-1}=f_0=f$，并记 $W_0=\varnothing$．假定 $f_j(j=0,1,\cdots,k-1)$ 已定义妥当，满足这样的条件：

(I_j) $f_j(p)=f_{j-1}(p),\quad \forall p\in M\setminus V_j$;

(II_j) f_j 在集合

$$H_j=\bigcup_{i=0}^{j}\overline{W}_i$$

上是浸入；

(III_j) $\|f_j(p)-f_{j-1}(p)\|<\dfrac{\varepsilon}{2^j},\ \forall p\in M$.

根据命题 2.4，存在 $f_k\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$，使得

(I_k) $f_k(p)=f_{k-1}(p),\ \forall p\in M\setminus V_k$;

(II_k) f_k 在集合

$$H_k = H_{k-1} \cup \overline{W}_k = \bigcup_{i=0}^{k} \overline{W}_i$$

上是浸入；

(Ⅲ$_k$) $\|f_k(p) - f_{k-1}(p)\| < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$，$\forall p \in M$.

$\mathscr{W} = \{W_i\}$ 覆盖了 M. 对任意一个 W_{k_0}, 因为 $\mathscr{V} = \{V_i\}$ 是局部有限族，所以紧致集 $\overline{W}_{k_0}$ 只与 $\mathscr{V}$ 中有限个集合相交．于是，存在 $k_1 > k_0$, 使得

$$\overline{W}_{k_0} \cap V_k = \varnothing, \quad \forall k > k_1.$$

由此可知

$$f_k(p) = f_{k+1}(p), \quad \forall p \in W_{k_0}, \ k > k_1.$$

因而可以定义

(2.1) $$g(p) = \lim_{k \to \infty} f_k(p), \quad p \in M.$$

考察函数序列 $\{f_k\}$ 及其极限函数 g, 还能得到更进一步的结论：

(1) 如上所述，对任意一个 W_{k_0}，存在自然数 $k_1 > k_0$, 使得

$$g(p) = f_k(p), \quad \forall p \in W_{k_0}, \ k > k_1.$$

因为 $f_k \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 并且 f_k 在集合 $H_k \supset \overline{W}_{k_0}$ 上是浸入，所以 $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 并且 g 是浸入映射．

(2) 从 (2.1) 的等价形式

(2.2) $$g(p) = f(p) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(p) - f_{k-1}(p)),$$

容易得知

$$\|g(p) - f(p)\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon, \quad \forall p \in M. \qquad \square$$

2.6 注记 命题 2.2—命题 2.4 为证明定理 2.5 作准备．命题 2.2 断定：映射 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 在任何一个局部坐标域上可以经过小的改动而变成浸入．命题 2.3 保证：映射 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ 在紧致集 K 上的浸入性质是稳定的，即不会因 f 的小的扰动而遭到破坏．这两个命题相结合，使得我们可以一小块又一小块地逐步对 f

作小的修改，每次修改后得到的映射在新的一小块上成为浸入而又不损害在原有若干块上的浸入性质．最后就能得到一个浸入映射 $g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$．类似这样的证明手法以后还将多次用到．务请读者对这里的典范做法细心加以体会．

如果把定理 2.5 中的条件 $n\geqslant 2m$ 加强到 $n>2m$，那么还能保证存在从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的单浸入．(我们把既是"单映射"又是"浸入映射"的映射叫做单浸入.)

2.7 定理(Whitney 单浸入定理) 设 M 是 C^{∞} 流形，$\dim M=m$，$n>2m$．则对任何浸入映射 $f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$ 和任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$，满足这样的条件：

(1) $g: M\to\mathbb{R}^n$ 是单浸入；

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\ \forall p\in M$．

证明 从浸入的典范局部表示(第一章命题 2.1)可以看出，对任何 $q\in M$，存在 q 点的开邻域 Q，使得 $f|Q$ 是单一的．以 $\mathscr{Q}$ 表示所有这样的 Q 组成的开集族，则 $\mathscr{Q}$ 是 M 的开覆盖．根据第二章定理 3.1，存在 M 的可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i, W_i，使得

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族，$\mathscr{U}<\mathscr{Q}$；

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1,\ i=1,2,\cdots$；

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖 M．

取 $\eta_i\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})\ (i=1,2,\cdots)$ 满足条件：

$$\begin{cases}\eta_i(p)=1, & \forall p\in\overline{W}_i,\\ 0<\eta_i(p)<1, & \forall p\in V_i\setminus\overline{W}_i,\\ \eta_i(p)=0, & \forall p\in M\setminus V_i.\end{cases}$$

我们按以下方式归纳构造浸入映射序列 $\{f_i\}\subset C^{\infty}(M,\mathbb{R}^n)$．首先取 $f_0=f$．假定 $f_0,\cdots,f_{k-1}$ 已定义妥当，我们将选取适当的 $b_k\in\mathbb{R}^n$，$\|b_k\|<\varepsilon/2^k$，使得

$$f_k(p)=f_{k-1}(p)+\eta_k(p)b_k$$

满足这样的条件：

（Ⅰ） f_k 是浸入映射；

（Ⅱ） $f_k(p)=f_k(q) \Rightarrow \begin{cases} \eta_k(p)=\eta_k(q), \\ f_{k-1}(p)=f_{k-1}(q). \end{cases}$

根据命题 2.3, 只要 b_k 选取得充分小，就能保证条件（Ⅰ）得到满足．为了使条件（Ⅱ）也得到满足，我们定义集合

$$D_k=\{(p,q)\in M\times M \mid \eta_k(p)\neq\eta_k(q)\}$$

和映射

$$\theta_k: D_k \to \mathbb{R}^n,$$
$$(p,q)\mapsto -\frac{f_{k-1}(p)-f_{k-1}(q)}{\eta_k(p)-\eta_k(q)}.$$

因为 $\dim(M\times M)=2m<n$, 所以 $\theta_k(D_k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．我们可以选取任意小的 $b_k\in\mathbb{R}^n\setminus\theta_k(D_k)$. 这样选择的 b_k 就能保证映射 $f_k(p)=f_{k-1}(p)+\eta_k(p)b_k$ 满足条件（Ⅱ）．事实上，假如

$$f_k(p)=f_k(q), \quad \eta_k(p)\neq\eta_k(q),$$

那么

$$b_k=-\frac{f_{k-1}(p)-f_{k-1}(q)}{\eta_k(p)-\eta_k(q)}, \quad (p,q)\in D_k.$$

这与 $b_k\notin\theta_k(D_k)$ 相矛盾．

因为 $\overline{W}_{k_0}$ 是紧致集，$\mathscr{V}=\{V_i\}$ 是局部有限集族，所以（通过类似于定理 2.5 证明中的讨论可知）对任意一个 W_{k_0}, 存在 $k_1>k_0$, 使得

$$f_k(p)=f_{k+1}(p), \quad \forall p\in W_{k_0}, \quad k\geqslant k_1.$$

又因为 $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M, 所以对任意的 $p\in M$, 存在极限

$$g(p)=\lim_{k\to\infty}f_k(p),$$

并且有

$$g(p)=f_k(p), \quad \forall p\in W_{k_0}, \ k\geqslant k_1.$$

对这样定义的映射 $g: M\to\mathbb{R}^n$, 可证明以下一些结论：

（0） $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ 并且 g 是浸入映射；

（1） $g: M\to\mathbb{R}^n$ 是单映射；

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon, \ \forall p\in M$.

结论(0)和(2)几乎是显然的．下面验证结论(1)．假设

$$p, q\in M, \quad g(p)=g(q).$$

如前所述,存在自然数 $k(p)$ 和 $k(q)$,分别使得

$$g(p)=f_k(p), \quad \forall k\geqslant k(p); \qquad g(q)=f_k(q), \quad \forall k\geqslant k(q).$$

因而

$$f_k(p)=f_k(q), \quad \forall k\geqslant \max(k(p), k(q)).$$

于是

$$f_k(p)=f_k(q) \Longrightarrow \begin{cases}\eta_k(p)=\eta_k(q),\\ f_{k-1}(p)=f_{k-1}(q),\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\eta_{k-1}(p)=\eta_{k-1}(q),\\ f_{k-2}(p)=f_{k-2}(q),\end{cases} \Longrightarrow \cdots.$$

这样,从 $g(p)=g(q)$ 出发,可以得到

$$\begin{cases}\eta_j(p)=\eta_j(q), \quad j=1, 2, \cdots,\\ f(p)=f_0(p)=f_0(q)=f(q).\end{cases}$$

设 $p\in W_h$,则由 $\eta_h(q)=\eta_h(p)=1$ 可知

$$q\in\overline{W_h}\subset V_h.$$

因为 $f|V_h$ 是单映射,并且

$$p, q\in V_h, \quad f(p)=f(q),$$

所以 $p=q$. 这证明了 $g: M\to\mathbb{R}^n$ 是单映射． □

§3 常态映射与 Whitney 嵌入定理

点集拓扑学中有这样的定理:"紧空间到 Hausdorff 空间中的单一连续映射是到像集的同胚．"我们先对这定理作一剖析,然后设法加以推广．

要证明单一连续映射 $f: X\to Y$ 是到像集的同胚,只须证明 f 是闭映射,即只须证明:"f 将 X 中的闭集映成 Y 中的闭集"．如果 X 是紧空间,Y 是 Hausdorff 空间,那么对于 X 的任何闭集 F,像集 $f(F)$ 是 Y 中的紧致集,因而也是闭集．

为了推广上述定理,先介绍常态映射 (proper mapping) 的概

念．

3.1 定义 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间，$f: X \to Y$ 是连续映射．如果 Y 中任何紧致集 K 的原像集 $f^{-1}(K)$ 都是 X 中的紧致集，那么我们就称 f 为**常态映射**．

3.2 引理 设 Y 是局部紧 Hausdorff 空间，则关于 Y 的子集 S 是否闭集，有这样的判别准则：

$$S\text{是 }Y\text{ 的闭集} \Longleftrightarrow \begin{cases}\text{对 }Y\text{ 的任何紧致集 }K,\\ \text{交集 }S\cap K\text{ 是紧致集}.\end{cases}$$

证明 "$\Longrightarrow$"部分是显然的．为了证明"$\Longleftarrow$"部分，只须指出：对任意的 $y\in Y\backslash S$，有 y 的某个邻域 V 与 S 不相交．

首先，取 y 的邻域 W，使得 $K=\overline{W}$ 是紧致集．因为 y 不属于紧致集 $K\cap S$，所以存在 y 的邻域 $V\subset W$，使得

(3.1) $$V\cap(K\cap S)=\varnothing.$$

因为 $V\subset W\subset\overline{W}=K$，所以 (3.1) 式也就是

(3.2) $$V\cap S=\varnothing. \qquad \square$$

在下面定理的证明中，将用到这样一个关系式：设 X 和 Y 是集合，$f: X\to Y$ 是一个映射，$A\subset X$，$B\subset Y$，则有

$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B.$$

(参看练习 C.6)

3.3 定理 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，Y 是局部紧 Hausdorff 空间，$f: X\to Y$ 是常态映射，则 f 是闭映射．如果 f 还是单映射，那么 f 是从 X 到 $f(X)$ 的同胚．

证明 设 F 是 X 的任意一个闭集，K 是 Y 的任意一个紧致集，我们来考察

$$f(F)\cap K=f(F\cap f^{-1}(K)).$$

因为 $F\cap f^{-1}(K)$ 是 X 中的紧致集，f 是连续映射，所以 $f(F)\cap K=f(F\cap f^{-1}(K))$ 是 Y 中紧致集．根据引理 3.2，可以断定 $f(F)$ 是 Y 中闭集．

这样，我们证明了 f 是闭映射．定理的其余部分是这一结论

的推论． □

3.4 注记

(Ⅰ) 设 Y 是 Hausdorff 拓扑空间．如果对于"Y 的子集 S 是否闭集"有如同引理 3.2 中那样的判别准则，那么我们就称 Y 为**紧生成空间**．

(Ⅱ) 局部紧 Hausdorff 空间是紧生成空间(引理 3.2)．任何距离空间也都是紧生成空间(练习 C.7)．

(Ⅲ) 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，Y 是紧生成空间，$f:X\to Y$ 是常态映射，则 f 是闭映射．如果 f 还是单映射，那么 f 是从 X 到 $f(X)$ 的同胚(练习 C.8)．

3.5 引理 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，$f:X\to\mathbb{R}^n$ 是连续映射，$p_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是到第一个因子空间的投影映射．若 $f_1=p_1\circ f$ 是常态映射，则 f 也是常态映射．

证明 对于任意一个紧致集 $K\subset\mathbb{R}^n$，投影 $p_1(K)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的紧致集，因而是有界闭集．不妨设 $p_1(K)\subset[-L,L]$．则

$$K\subset p_1^{-1}([-L,L]),\qquad f^{-1}(K)\subset f^{-1}(p_1^{-1}([-L,L])).$$

因为 $f_1:X\to\mathbb{R}$ 是常态映射，

$$f^{-1}(p_1^{-1}([-L,L])=(p_1\circ f)^{-1}([-L,L])=f_1^{-1}([-L,L])$$

是 X 中的紧致集，而 $f^{-1}(K)$ 是其闭子集，所以 $f^{-1}(K)$ 也是紧致集． □

3.6 引理 设 M 是 C^∞ 流形，则存在 C^∞ 常态映射 $f:M\to\mathbb{R}^n$，这里 $n\in\mathbb{N}$.

证明 首先，取 M 的可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i，$W_i\,(i=1,2,\cdots)$，满足这样一些条件:

(1) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限集合族;

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1,\ i=1,2,\cdots$;

(3) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖 M.

然后取 $\eta_j\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta_j(p)=1, & \forall p\in\overline{W}_j,\\ 0<\eta_j(p)<1, & \forall p\in V_j\setminus\overline{W}_j,\\ \eta_j(p)=0, & \forall p\in M\setminus V_j.\end{cases}$$

我们定义

$$\alpha(p)=\sum_{j=1}^{\infty} j\,\eta_j(p).$$

易见 $\alpha\in C^\infty(M,\mathbb{R})$．还可证明 $\alpha: M\to\mathbb{R}$ 是常态映射．为此，考察 $\mathbb{R}$ 的任意一个紧致集 K，可设 $K\subset[-L,L]$．因为

$$\alpha^{-1}(K)\subset\alpha^{-1}([-L,L])\subset\bigcup_{j=1}^{L}\overline{W}_j,$$

并且 $\bigcup_{j=1}^{L}\overline{W}_j$ 是紧致集，所以它的闭子集 $\alpha^{-1}(K)$ 也是紧致集．

利用上面构造的 C^∞ 常态映射 $\alpha: M\to\mathbb{R}$，我们定义映射 $f: M\to\mathbb{R}^n$ 如下：

$$f(q)=(\alpha(q),0,\cdots,0).$$

根据引理 3.5，显然 f 是 C^∞ 常态映射． □

3.7 引理 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，$f: X\to\mathbb{R}^n$ 是常态映射，$g: X\to\mathbb{R}^n$ 是连续映射．如果

$$\|g(p)-f(p)\|\leqslant 1,\quad \forall p\in X,$$

那么 g 也是常态映射．

证明 $\mathbb{R}^n$ 中的任何紧致集 K 都是有界闭集，可设 $K\subset\overline{B}_r$．因为

$$\|f(p)\|\leqslant\|g(p)\|+1.\quad \forall p\in X,$$

所以

$$g^{-1}(K)\subset g^{-1}(\overline{B}_r)\subset f^{-1}(\overline{B}_{r+1}).$$

于是，作为紧致集 $f^{-1}(\overline{B}_{r+1})$ 的闭子集，$g^{-1}(K)$ 必定是紧致集． □

3.8 定理（Whitney 嵌入定理） 设 M 是 m 维 C^∞ 流形，$n\geqslant 2m+1$．则存在从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 嵌入映射

$$h: M\to\mathbb{R}^n,$$

使得 $h(M)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集．

证明 任取一个从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 常态映射 f. 根据定理 2.5, 存在浸入映射 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\|g(p)-f(p)\|<1/2, \quad \forall p\in M.$$

根据定理2.7, 又存在单浸入$h\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\|h(p)-g(p)\|\leqslant 1/2, \quad \forall p\in M.$$

因为 $\|h(p)-f(p)\|<1$, $\forall p\in M$, 所以 $h: M\to\mathbb{R}^n$ 也是常态映射, 因而 h 是闭映射, 并且是从 M 到 $f(M)\subset\mathbb{R}^n$ 的同胚. 这样的 h 满足定理的全部要求. □

下面的引理能帮助我们进一步理解 Whitney 嵌入定理的涵义: 任何微分流形都可看作适当的 Euclid 空间的正则子流形.

3.9 引理 设 M 和 N 是 C^r 流形, $h: M\to N$ 是 C^r 嵌入映射 $(r\geqslant 1)$, 则 $M'=h(M)$ 是 N 的 C^r 正则子流形, 并且 $h: M\to M'$ 是 C^r 同胚.

证明 考察任意一点 $q=h(p)\in M'=h(M)$. 因为 $h: M\to N$ 是浸入映射, 所以存在 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡 (U,φ) 和 $q=h(p)$ 点邻近的N 的局部坐标图卡 (W,ψ), 使得

$$h(U)\subset W, \quad \varphi(p)=0, \quad \psi(q)=0,$$

$$\psi\circ h\circ\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0), \forall(x_1,\cdots,x_m)\in\varphi(U).$$

上面最后一个等式可以写做

$$\psi\circ h(p')=(\varphi(p'),0)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{n-m}, \quad \forall p'\in U. \tag{3.3}$$

因而有

$$\psi(h(U))=\varphi(U)\times 0. \tag{3.4}$$

又因为 $h: M\to M'=h(M)$ 是同胚映射并且 M' 赋有作为 N 的子空间的拓扑, 所以 $h(U)$ 是 M' 中的开集并且存在 N 的开集 Q, 使得 $h(U)=Q\cap M'$. 分别取 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^{n-m}$ 的含有原点的开集 G 和 H, 使得

$$G\subset\varphi(U), \quad G\times H\subset\psi(W\cap Q),$$

然后取

$$V=\psi^{-1}(G\times H)\subset W\cap Q.$$

则 V 是 N 中点 $q=h(p)$ 的开邻域(参看图 6),并且

$$\begin{aligned}\psi(V\cap M')&=\psi((V\cap W\cap Q)\cap M')\\&=\psi((V\cap W)\cap(Q\cap M'))=\psi(V\cap h(U))\\&=\psi(V)\cap\psi(h(U))=(G\times H)\cap(\varphi(U)\times 0)\\&=G\times 0=(G\times H)\cap(\mathbb{R}^m\times 0)\\&=\psi(V)\cap(\mathbb{R}^m\times 0).\end{aligned}$$

这证明了 M' 是 N 的正则子流形. 定理的后一部分结论的验证留给读者作为练习. □

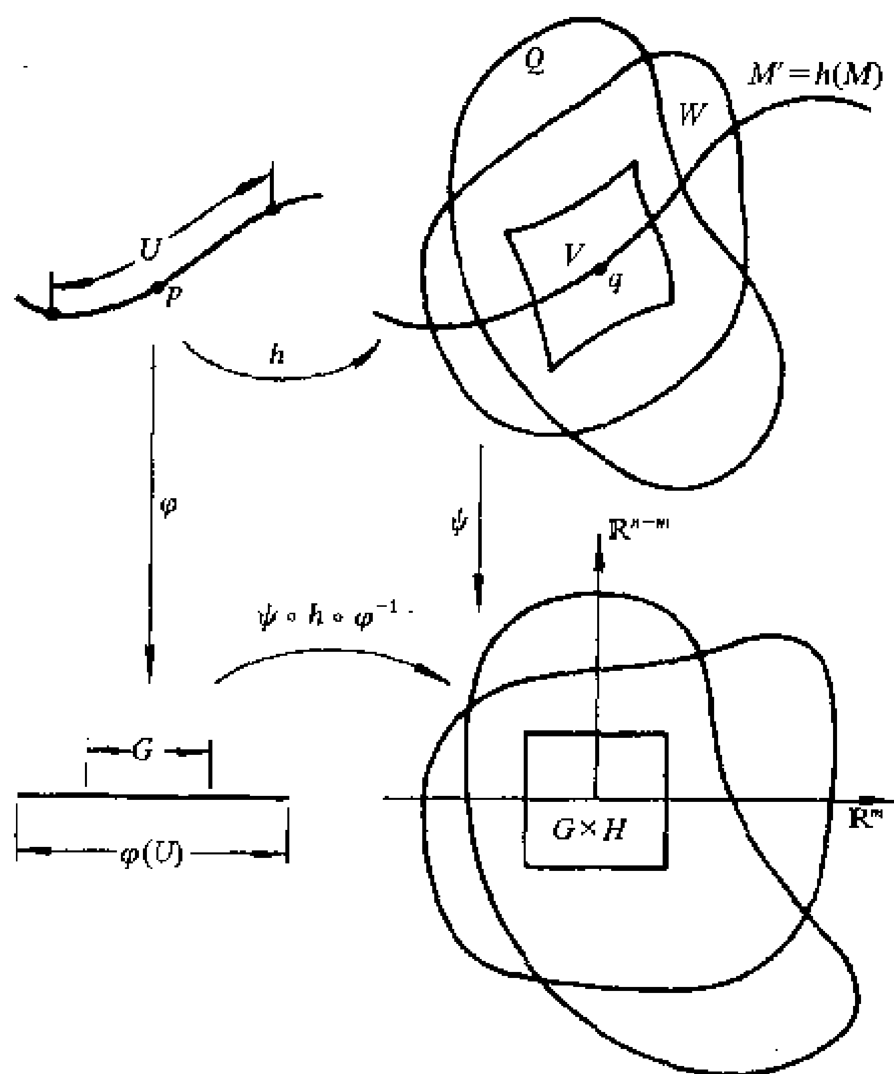


图 6

3.10 定理(Whitney 嵌入定理的另一陈述) 设 M 是 m 维光滑流形，$n \geqslant 2m+1$. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集 M'，它是 $\mathbb{R}^n$ 的正则光滑子流形，并且光滑同胚于流形 M.

3.11 推论 任何(满足第二可数公理的) C^∞ 流形 M 都是可距离化的空间，即可赋予 M 适当的距离函数 $d: M \times M \to \mathbb{R}_+$，使得由 d 给出的距离拓扑与 M 的拓扑一致.

练 习 C

C.1. 设 M 和 N 是微分流形，$q \in N$. 求证 $M \times \{q\}$ 是乘积流形 $M \times N$ 中的零测集. 特别地，$M \times \{0\}$ 是乘积流形 $L = M \times \mathbb{R}^k$ 中的零测集.

C.2. 请完成命题 1.4，引理 1.6 和引理 1.7 的证明.

下面的练习 C.3—C.5 讨论**关于零测集的 Fubini 定理**.

C.3. 考察包含于开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之中且覆盖了闭区间 $[a, b]$ 的任一族开区间 $\mathscr{I}$. 求证存在 $\mathscr{I}$ 的有限子族 $\mathscr{I}_0 = \{I_1, \cdots, I_r\}$，使得

$$\bigcup_{j=1}^{r} I_j \supset [a, b], \qquad \sum_{j=1}^{r} |I_j| < 2(b-a+\varepsilon).$$

C.4. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集，s 是一个实数. 我们约定记

$$E_s = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E \mid x_1 = s\}.$$

如果 U 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开集，使得 $E_s \subset \{s\} \times U$，那么存在含有 s 的适当小的区间 $J \subset \mathbb{R}$，使得

$$E_t \subset \{t\} \times U, \quad \forall t \in J.$$

C.5. (关于零测集的 Fubini 定理) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集. 如果任何一个 $s \in \mathbb{R}$ 都使得 E_s 是 $\{s\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集，那么 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集.

C.6. 设 X 和 Y 是任意的非空集合，$f: X \to Y$ 是任意一个映射，$A \subset X$, $B \subset Y$. 试证 $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

C.7. 试证任何距离空间都是紧生成空间. (关于紧生成空间

的定义请参看注记 3.4)．

C.8. 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，Y 是紧生成空间，$f: X \to Y$ 是常态映射．则 f 是闭映射(即 f 将 X 的任何闭集映成 Y 中的闭集)．如果 f 还是单映射，那么 f 是从 X 到 $f(X)$ 的同胚映射．

C.9. 设 X 和 Y 是距离空间，$f: X \to Y$ 是连续映射．则 f 为常态映射的充分必要条件是："如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 使得 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 Y 中某点，那么 $\{x_n\}$ 必定含有收敛的子序列．"

C.10. 试利用 Whitney 嵌入定理，证明任何光滑流形都可赋以距离使之成为一个完备的距离空间．

第四章　向量丛与管状邻域定理，映射的光滑化与同伦的光滑化

§1　引　　例

首先介绍"同伦". 这是拓扑学中最基本的概念之一.

设 X 和 Y 是拓扑空间，$f_i: X \to Y$ 是连续映射 $(i=0,1)$，$I=[0,1]$ 是实数区间. 如果存在连续映射 $F: I\times X \to Y$，使得

$$F(0,x)=f_0(x), \quad \forall x\in X,$$
$$F(1,x)=f_1(x), \quad \forall x\in X,$$

那么我们就说 F 是从 f_0 到 f_1 的一个**同伦**. 当这样的同伦存在时，我们就说 f_0 **同伦于** f_1，记为

$$f_0 \simeq f_1.$$

需要指明具体的同伦时，可写为

$$f_0 \overset{F}{\simeq} f_1.$$

容易验证: 同伦关系是一种等价关系.

对一般的连续映射作普遍的研究，由于情况错综复杂，往往难以入手. 为了从"一团乱麻"中理出头绪，人们试探用某类较易研究的"好"映射去逼近任意的连续映射. 有许多情形，所讨论的性质是在同伦变化下保持不变的(这几乎是拓扑学中所研究的主要情形)，自然就要求用来逼近的"好"映射与被逼近的连续映射之间有同伦关系. 在组合拓扑学中，常用的"好"映射是"分片线性映射"(即"单纯映射")，因而"单纯逼近定理"是最重要的工具之一. 在微分拓扑学中，常选用的"好"映射是"光滑映射"，所以连续映射的光滑逼近也是很重要的技术手段.

我们考虑这样一个问题：设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$f: M \to N$ 是连续映射，能否用光滑映射 $g: M \to N$ 去逼近 f，并且要求用来逼近的光滑映射 g 同伦于 f？

对于 $N=\mathbb{R}^n$ 的情形，这问题比较容易解决．下面就是有关的讨论．

1.1 引理 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 的开子集，K 是 $\mathbb{R}^m$ 的紧致子集，$K \subset U$，δ 是任意给定的正实数．则对任意的 $f \in C^0(U, \mathbb{R})$，存在 $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$，使得

$$|g(x)-f(x)|<\delta, \quad \forall x \in K.$$

证明 对于 $\rho>0$，记

$$K_\rho=\{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists y \in K: \ \|x-y\| \leqslant \rho\}.$$

则 K_ρ 仍是紧致集，并且只要我们把正数 ρ 选择得足够小，就可使得 $K_\rho \subset U$（取定一个这样的 ρ）．根据第二章 §4 的推论 4.6，存在 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ 适合

$$K_\rho \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid \eta(x)=1\} \subset \operatorname{supp} \eta \subset U.$$

我们先将 f 修改扩充为

$$f_0(x)=\begin{cases}\eta(x) f(x), & \forall x \in U, \\ 0, & \forall x \in \mathbb{R}^m \backslash U.\end{cases}$$

在第二章 §4 里，已经知道存在函数 $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$，适合这样的条件

$$\begin{cases}\omega(x)=1, & \forall x \in \overline{B_1}, \\ 0<\omega(x)<1, & \forall x \in B_2 \backslash \overline{B_1}, \\ \omega(x)=0, & \forall x \in \mathbb{R}^m \backslash B_2, \\ \omega(-x)=\omega(x), & \forall x \in \mathbb{R}^m.\end{cases}$$

我们将用这样的 ω 去"磨光"f_0．为此，先取

$$\varepsilon \in(0, \rho / 3), \quad c=\int_{B_3} \omega(u) \mathrm{d} u,$$

然后作积分

$$g_\varepsilon(x)=\frac{1}{c\varepsilon^m}\int_{\mathbb{R}^m}\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f_0(y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^m}\omega(u)f_0(x+\varepsilon u)\mathrm{d}u=\frac{1}{c}\int_{B_3}\omega(u)f_0(x+\varepsilon u)\mathrm{d}u.$$

易知 $g_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$，并且对于 $x\in K$ 有

$$|g_\varepsilon(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{c}\int_{B_3}\omega(u)(f(x+\varepsilon u)-f(x))\mathrm{d}u\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{c}\int_{B_3}\omega(u)|f(x+\varepsilon u)-f(x)|\mathrm{d}u.$$

由于 f 在紧致集 K_ρ 上的一致连续性，上面不等式右端最后一个积分表示式随着 $\varepsilon\to0$ 而一致地趋于 0（相对于参数 $x\in K$）. 因而，存在充分小的 $\varepsilon>0$，使得

$$|g_\varepsilon(x)-f(x)|<\delta,\quad\forall x\in K.\qquad\square$$

1.2 引理 设 M 是 C^∞ 流形，G 是 M 的一个开集，(U,φ) 是 M 的一个局部坐标图卡，并且满足条件：$\varphi(U)=B_3$. 我们记 $V=\varphi^{-1}(B_2)$，$W=\varphi^{-1}(B_1)$. 如果 $f:M\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射，它限制在开集 G 上是光滑的，那么对任意给定的正实数 δ，存在连续映射 $g:M\to\mathbb{R}$，满足条件：

(1) $g(p)=f(p),\ \forall p\in M\setminus V$,

(2) g 限制在开集 $G\cup W$ 上是光滑的，

(3) $|g(p)-f(p)|<\delta,\ \forall p\in M$.

证明 取 $\eta\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足条件：

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall p\in V\setminus\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall p\in M\setminus V.\end{cases}$$

根据引理 1.1（对于紧致集 $K=\overline{B}_2$ 和开集 B_3），函数 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}\in$

$C^0(B_3,\mathbb{R})$可以用函数 $g_0\in C^\infty(B_3,\mathbb{R})$在$B_2$上一致逼近:

$$|f\circ\varphi^{-1}(x)-g_0(x)|<\delta,\quad \forall x\in\overline{B}_2.$$

记 $g_1=g_0\circ\varphi$, 则易知 $g_1\in C^\infty(U,\mathbb{R})$,并且

$$|f(p)-g_1(p)|<\delta,\quad \forall p\in\overline{V}.$$

我们把f写成

$$f(p)=(1-\eta(p))f(p)+\eta(p)f(p),$$

然后定义

$$g(p)=(1-\eta(p))f(p)+\eta(p)g_1(p).$$

显然函数 $g:M\to\mathbb{R}$ 满足引理所要求的条件 (1), (2) 和 (3). □

1.3 引理 设M是光滑流形, $f:M\to\mathbb{R}$是连续映射, δ是任意给定的正实数. 则存在$g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$,使得

$$|g(p)-f(p)|<\delta,\quad \forall p\in M.$$

证明 选取M的可数个图卡(U_i,φ_i)和开集V_i, $W_i(i=1,2,\cdots)$,适合条件:

(a) $\varphi_i(U_i)=B_3$, $\varphi_i(V_i)=B_2$, $\varphi_i(W_i)=B_1$;

(b) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族;

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M.

约定记 $$W_0=\varnothing,\quad f_0=f.$$

假定$f_k\in C^0(M,\mathbb{R})$已定义妥当,它限制在开集

$$G_k=\bigcup_{j=0}^{k}W_j$$

之上是光滑的. 根据引理 1.2, 存在 $f_{k+1}\in C^0(M,\mathbb{R})$, 该 f_{k+1} 限制在开集

$$G_{k+1}=G_k\cup W_{k+1}=\bigcup_{j=0}^{k+1}W_j$$

之上是光滑的,f_{k+1} 限制在 $M\setminus V_{k+1}$上等于f_k, 并且

$$|f_{k+1}(p)-f_k(p)|<\frac{\delta}{2^{k+1}},\quad \forall p\in M.$$

在归纳定义了序列$\{f_k\}$之后，我们取

$$g(p)=\lim_{k\to\infty} f_k(p).$$

则 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，并且适合条件

$$|g(p)-f(p)|<\delta,\quad \forall p\in M. \qquad \square$$

我们约定以记号 $\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的 Euclid 范数.

1.4 定理 设 M 是光滑流形，$f:M\to\mathbb{R}^n$ 是连续映射，ε 是任意给定的正实数，则存在 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$，使得

$$\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\quad \forall p\in M,$$

并且 g 同伦于 f.

证明 取 $\delta=\varepsilon/\sqrt{n}$. 对 f 的 n 个分量分别引用引理 1.3 就得到本定理结论前一部分的证明. 然后定义

$$F(t,p)=(1-t)g(p)+tf(p),\quad \forall (t,p)\in I\times M.$$

则易验证：F 是从 g 到 f 的同伦. 这完成了定理结论后一部分的证明. $\square$

约定以 S^n 表示标准的 n 维球面，即约定

$$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=1\},$$

其中的 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 Euclid 范数. 对于 M 是光滑流形，$N=S^n$ 的情形，再来考虑前面提出的关于连续映射 $f:M\to N$ 的光滑化问题.

因为 S^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子流形，任何连续映射 $f:M\to S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 当然可以看成是到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的连续映射. 于是，对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $g_1\in C^\infty(M,\mathbb{R}^{n+1})$，使得

$$\|g_1(p)-f(p)\|\leqslant\varepsilon/2<1/2.$$

并且从 $I\times M$ 到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的映射

$$F_1(t,p)=(1-t)g_1(p)+tf(p),\quad (t,p)\in I\times M$$

是从 g_1 到 f 的同伦. 为使所得到的光滑逼近是从 M 映到 S^n 的，

我们设法将 $g_1(p)$ 投射到 S^n 上去.

对于任意 $y\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, 可以定义

$$\pi(y)=y/\|y\|.$$

显然 $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to S^n$ 是一个光滑映射. 如果记

$$g=\pi\circ g_1,\quad F=\pi\circ F_1,$$

那么 g 是从 M 到 S^n 的光滑映射, F 是从 $I\times M$ 到 S^n 的连续映射. 容易验证, g 满足要求

$$\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\quad \forall p\in M.$$

还容易验证, F 是从 g 到 f 的同伦:

$$\left.\begin{array}{l} F(0,p)=\pi\circ F_1(0,p)=\pi\circ g_1(p)=g(p), \\ F(1,p)=\pi\circ F_1(1,p)=\pi\circ f(p)=f(p), \end{array}\right. \quad \forall p\in M.$$

在上面的讨论中,对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子流形 S^n, 我们在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中确定了 S^n 的一个开邻域

$$\Omega=\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\supset S^n$$

并定义了一个光滑的投射

$$\pi:\Omega\to S^n.$$

借助于这样的技术手段,顺利地解决了从 M 到 S^n 的映射的光滑化问题——这只是一般的"管状邻域"技术的一个最简单的例子.

对于一般的 n 维光滑流形 N, 我们可以先将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中去. 如果能够在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中确定 N 的一个适当的开邻域 Ω, 并且确定适当的光滑投射

$$\pi:\Omega\to N,$$

那么也就能仿照刚才的做法,顺利解决从 M 到 N 的映射的光滑化问题.

为了解决映射的光滑化问题,将利用"管状邻域"技术. 在证明"管状邻域定理"之前,先要介绍关于向量丛的一些最基本的概念与知识.

§2 向量丛的概念

在一点邻近作映射的线性近似是微分学的一种基本技术手段．像微分流形这样的“弯曲的空间”，本身并不具有线性结构．对许多情形，我们有必要给微分流形的每一点配上一个适当的线性空间(例如：切空间)．向量丛概念的基本思想源出于此．为了从不同的角度考察这一概念，我们将介绍向量丛的三种(相互等价的)定义方式．

2.1 定义(向量丛的第一种定义方式) 设 E 和 X 是 C^r 流形(对 $r=0$ 的情形，可以允许 E 和 X 只是 Hausdorff 拓扑空间)，$\pi: E\to X$ 是 C^r 满映射，$\mathbb{R}^k$ 是通常的 k 维实空间．若以下的条件(0)和(1)得以满足，则称 $(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$ 为 k 维 C^r 实向量丛，并称 E 为(向量丛的)全空间，X 为底空间，π 为投影，$\mathbb{R}^k$ 为纤维型．条件(0)和(1)是：

(0) 对任意 $x\in X$，集合 $E_x=\pi^{-1}(x)$ 赋有 k 维实向量空间结构(通常称 E_x 为 x 点上的纤维)；

(1) 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$，并且对每一个开集 $U\in\mathscr{U}$，存在 C^r 同胚

$$h=h_U: \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k,$$

使得

(1.a) $p_1\circ h=\pi$，即下面的图表(图 7)可交换(这里的 p_1 是从乘积 $U\times\mathbb{R}^k$ 到第一个因子 U 的投影)；

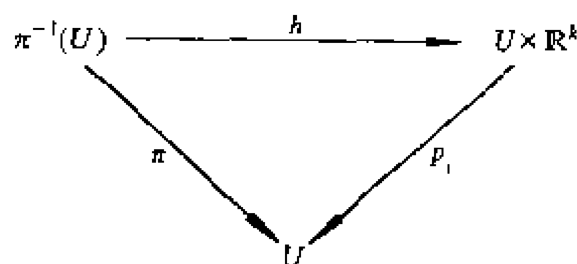


图 7

(1.b) 对任意的 $x \in U$，映射

$$h|\pi^{-1}(x) : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$$

是向量空间之间的同构．

在上面的定义中，开集 $U \in \mathscr{U}$ 被称为局部平凡域，同胚 h 被称为局部平凡化．

在不致于引起混淆的情况下，有时也简单地称"E 是一个 k 维 C^r 实向量丛"．

我们约定以 $GL(\mathbb{R}^k)$ 表示所有的非退化 $k \times k$ 实数方阵组成的集合．$GL(\mathbb{R}^k)$ 可以看成是空间 $\mathbb{R}^{k^2}$ 的开子集，因而赋有 C^∞ 微分结构．

2.2 定义（向量丛的第二种定义方式） 设 X 是 C^r 流形（$r=0$ 的情形允许 X 仅是 Hausdorff 拓扑空间），并设

(0) 对任意的 $x \in X$，有一个确定的 k 维实向量空间 E_x 与之对应，于是，我们可以构作

$$E = \coprod_{x \in X} E_x \quad (\textstyle\coprod \text{ 表示“不交并”}),$$

而且可以定义这样一个映射 $\pi: E \to X$，

$$\pi(\xi) = x, \quad \forall \xi \in E_x;$$

(1) 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$，使得对于任意一个 $U \in \mathscr{U}$，有一个确定的标架场

$$e_U(x) = (e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k}(x))$$

与之对应，这里的 $e_U(x)$ 对每个 $x \in U$ 都是 E_x 中的基底（即"标架"），于是，当 $U, V \in \mathscr{U}$，$U \cap V \neq \varnothing$ 时，在交集 $U \cap V$ 上定义了两组标架 $e_U(x)$ 和 $e_V(x)$，因而可设

$$e_U(x) = e_V(x) A_{VU}(x),$$

这里的 $A_{VU}(x)$ 是 $k \times k$ 非退化实数方阵；

(2) 映射

$$A_{VU} : U \cap V \to GL(\mathbb{R}^k)$$

是 C^r 的．

当上述条件(0)，(1)和(2)得以满足时，我们就把$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$叫做$k$维$C^k$实向量丛.

在上面给出的定义中，局部标架场$e_U(x)$与$e_V(x)$之间的变换$A_{VU}(x)$满足条件(2). 我们把这样两个标架场称为是C^r相容的.

2.3 定义(向量丛的第三种定义方式) 设E是一个集合，X是一个C^r流形($r=0$情形允许X只是Hausdorff拓扑空间)，$\pi: E \to X$是满映射，$\mathbb{R}^k$是k维实空间. 如果下面的条件(1.a)，(1.b)和(2)得以满足，那么我们就把$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$叫做$C^r$向量丛.

(1.a) 存在X的开覆盖$\mathscr{U}$，并且对每一个$U \in \mathscr{U}$存在确定的单满映射(一一对应)

$$h = h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k,$$

使得以下图表可交换(图8)：

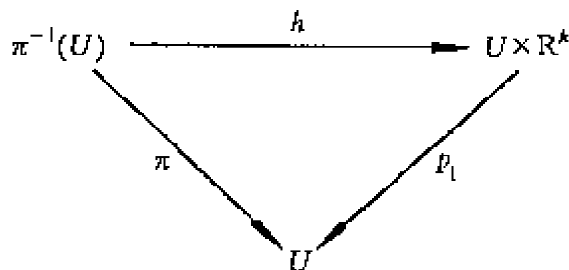


图 8

(1.b) 若$U, V \in \mathscr{U}$并且$U \cap V \neq \varnothing$，则$h_V \circ h_U^{-1}$表示为

$$h_V \circ h_U^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

$$(x, u) \mapsto (x, A_{VU}(x)u),$$

其中的$A_{VU}(x) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$;

(2) 若$U, V \in \mathscr{U}$，$U \cap V \neq \varnothing$，则

$$A_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$$

是C^r映射.

2.4 定理 定义2.1，定义2.2和定义2.3相互等价.

证明 约定用记号 Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ分别代表定义 2.1，定义 2.2 和定义 2.3．并约定以"Ⅰ$\Longrightarrow$Ⅱ"这样的记号表示"定义 2.1 意义下的向量丛也是定义 2.2 意义下的向量丛"(余类推)．我们将证明

"Ⅰ$\Longrightarrow$Ⅱ$\Longrightarrow$Ⅲ$\Longrightarrow$Ⅰ"．

首先证明"Ⅰ$\Longrightarrow$Ⅱ"．设 $\delta_1, \cdots, \delta_k$ 是 $\mathbb{R}^k$ 的标准基底，即设

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{ki} \end{bmatrix}, \quad \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & 若 j = i, \\ 0, & 若 j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, k.$$

我们取

$$e_{U,i}(x) = h_U^{-1}(x, \delta_i), \quad i = 1, \cdots, k,$$
$$e_U(x) = (e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k}(x)).$$

则显然 $e_U(x)$ 满足定义 2.2 中的要求．

其次证明"Ⅱ$\Longrightarrow$Ⅲ"．对于定义 2.2 意义下的向量丛$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$，显然有

$$\pi^{-1}(U) = \coprod_{x \in U} E_x.$$

我们构作"一一对应"映射 $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$，规定：若

$$\xi \in E_x, \quad \xi = \sum_{i=1}^{k} u^i e_{U,i}(x),$$

则

$$h_U(\xi) = (x, u), \quad u = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^k \end{bmatrix}.$$

这样定义的 h_U，其逆映射为

$$h_U^{-1}(x, u) = \sum_{i=1}^{k} u^i e_{U,i}(x).$$

显然对于 $U \cap V \neq \varnothing$ 的情形有

$$h_V \circ h_U(x, u) = (x, A_{VU}(x) u),$$

并且

$$A_{VU}: U \cap V \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$$

是 C^r 映射.

最后证明"Ⅲ$\Longrightarrow$Ⅰ". 对于 $x\in U$, 我们借助于一一对应 h_U^{-1} 将$\{x\}\times\mathbb{R}^k$的线性结构搬过来作为 $E_x=\pi^{-1}(x)$ 的线性结构. 由于定义 2.3 中的条件,用这种方式定义的 E_x 的线性结构不依赖于 $U\in\mathscr{U}$ 的具体选择(只要求 $x\in U$). 我们还将利用各个 h_U^{-1} 把 $U\times\mathbb{R}^k$的拓扑结构搬过来,作成 E 的拓扑结构. 并将证明赋有这种拓扑的空间 E 具有 C^r 微分结构.

我们规定: E 的子集 D 称为开集,当且仅当对任何 $U\in\mathscr{U}$, 集合 $h_U(D\cap\pi^{-1}(U))$ 是 $U\times\mathbb{R}^k$ 中的开集. 用这种方式赋予 E 以拓扑结构,容易看出: E 是一个 Hausdorff 拓扑空间 (因为 X 本身是 Hausdorff空间). 这样定义的拓扑使得 $h_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$ 成为同胚映射.

因为 $h_V\circ h_U^{-1}(x,u)=(x,A_{VU}(x)u)$, 其中

$$A_{VU}:U\cap V\to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^k)$$

是 C^r 映射,所以

$$h_V\circ h_U^{-1}:(U\cap V)\times\mathbb{R}^k\to(U\cap V)\times\mathbb{R}^k$$

也是 C^r 映射. 借助于各个同胚 $h_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$,我们可以赋予 E 以确定的 C^r 微分结构. 对这样建立的 C^r 微分结构,容易验证

$$\pi:E\to X$$

是 C^r 映射,并且

$$h_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$$

是 C^r 同胚. □

2.5 注记 虽然在定义 2.2 和定义 2.3 中没有以一目了然的方式指出全空间 E 是拓扑空间和 C^r 流形,但如定理 2.4 证明中所述,我们可以赋予 E 以明确的拓扑结构和 C^r 微分结构.

2.6 定义 设$(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$是 C^r 向量丛. 如果 C^r 映射 $\sigma:X\to E$ 满足这样的条件

$$\pi\circ\sigma(x)=x,\quad \forall x\in X$$

(也就是$\sigma(x)\in\pi^{-1}(x)=E_x$, $\forall x\in X$),那么我们就说σ是向量丛E的一个C^r**截面**.

2.7 例 设M是C^r流形, $\dim M=m$. 在第一章§3中,对每一点$p\in M$定义了M在p点的切空间T_pM. 如果记

$$TM=\coprod_{p\in M}T_pM,$$

并且定义

$$\pi: TM\to M,\quad \pi(\xi)=p,\quad \forall\xi\in T_pM,$$

那么用定义2.2很容易判明: $(TM, M, \pi, \mathbb{R}^m)$是一个$C^{r-1}$向量丛. 我们把这向量丛称做$M$的**切丛**. 通常人们把切丛的截面叫做**向量场**.

2.8 例 设X是C^r流形($r=0$的情形允许X只是Hausdorff拓扑空间). 我们记$E=X\times\mathbb{R}^k$并定义

$$\pi: E=X\times\mathbb{R}^k\to X,$$
$$(x,u)\mapsto x.$$

显然$(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$是C^r向量丛,这最简单的向量丛被称为**平凡丛**. 平凡丛的截面σ具有这样的形式:

$$\sigma(x)=(x,f(x)),\quad \forall x\in X,$$

其中的f是从X到$\mathbb{R}^k$的映射.

2.9 注记 C^r向量丛概念的核心是: 相应于底空间某个开覆盖的一族局部平凡化和不同的局部平凡化之间的C^r相容性. 本节中以三种方式介绍的向量丛定义,形式上都与适当的开覆盖$\mathscr{U}$的选取有关. 这样定义的对象在许多文献中被称为(相应于开覆盖$\mathscr{U}$的)"坐标丛". 更精细的定义还应把表面上依赖于不同的开覆盖实质上却无差别的那些"形异实同"的"坐标丛"等同起来,当作同一个向量丛. 对此,我们不打算作全面细致的讨论,仅仅以定义2.3为例作一个简要的说明.

约定将定义2.3所述的对象称为"C^r坐标丛",它由全空间E, 底空间X, 投影$\pi: E\to X$, X的开覆盖$\mathscr{U}$和相应于每个$U\in\mathscr{U}$的

确定的单满映射(局部平凡化)

$$h=h_U: \pi^{-1}(U) \to U\times\mathbb{R}^k$$

组成．这样的坐标丛应记为

$$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k, \mathscr{U}, \mathscr{H}),$$

其中 $\mathscr{H}=\{h_U | U\in\mathscr{U}\}$ 的成员是上面所说的那些局部平凡化．两个这样的 C^r 坐标丛

$$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k, \mathscr{U}, \mathscr{H}) \quad 和 \quad (E, X, \pi, \mathbb{R}^k, \mathscr{V}, \mathscr{G})$$

被称为是 C^r 相容的，倘若

$$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k, \mathscr{U}\cup\mathscr{V}, \mathscr{H}\cup\mathscr{G})$$

仍是一个 C^r 坐标丛．容易验证：C^r 坐标丛之间的这种 C^r 相容关系是一种等价关系．以 E 为全空间，X 为底空间，π 为投影，$\mathbb{R}^k$ 为纤维型的所有的 C^r 坐标丛，按照 C^r 相容关系分成的每一个等价类被称为是一个 C^r 向量丛．

有了这个注记的说明，我们以后运用向量丛概念时可以更灵活地选取局部平凡域 U 和相应的局部平凡化 $h=h_U$.

§3　子丛，Riemann 度量，正交补丛

3.1　定义　设$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$是一个 C^r 向量丛．我们称 $E_1\subset E$ 是 E 的 k_1 维子向量丛，倘若对任意的 $x_0\in X$，存在 x_0 在 X 中的开邻域 U 和 E 的 C^r局部平凡化 $h: \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$ 使得

$$h(\pi^{-1}(U)\cap E_1)=U\times(\mathbb{R}^{k_1}\times\{0\}).$$

3.2　命题　设$(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$是 C^r 向量丛．为使 $E_1\subset E$ 是 E 的 k_1 维子向量丛，必须而且只须：对任意的 $x_0\in X$，存在 x_0 在 X 中的开邻域 U 和定义在 U 上的 E 的 C^r 标架场

$$e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k_1}(x), e_{U,k_1+1}(x), \cdots, e_{U,k}(x),$$

使得 $(E_1)_x=\pi^{-1}(x)\cap E_1$ 是由 $e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k_1}(x)$生成的 $E_x=\pi^{-1}(x)$ 的线性子空间$(\forall x\in U)$．

证明　留给读者作为练习．　□

3.3 定义 设$(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$和$(F,X,\rho,\mathbb{R}^l)$是同一底空间X上的两个C^r向量丛，则可赋予

$$E\oplus F=\coprod_{x\in X}(E_x\oplus F_x)$$

确定的$k+l$维C^r实向量丛结构(仍以X为底空间)．我们称这向量丛为E与F的直和(又称 Whitney 和)．

3.4 定义 设$(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$是C^r实向量丛．若$\beta: E\oplus E\to\mathbb{R}$是$C^r$映射，它限制在每一纤维$E_x\oplus E_x$上是空间$E_x$的内积(即对称，双线性，正定的实函数)，则称$\beta$为向量丛$E$的$C^r$-Riemann 度量．

在不致引起混淆的情况下，人们常常用简单的记号$\langle\xi,\eta\rangle$代替$\beta(\xi,\eta)$.

3.5 定理 设X是(满足第二可数公理的)C^r流形，则以X为底空间的任何C^r向量丛E都具有C^r-Riemann 度量．

证明 利用适当的单位分解，可以把各个局部平凡表示的 Euclid 内积粘合成为E的一个 Riemann 度量．(细节的验证留给读者作为练习．) □

3.6 定理 设C^r向量丛$(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$赋有确定的C^r-Riemann 度量，F是E的子向量丛，$F_x=\pi^{-1}(x)\cap F$，并设$F_x^\perp$是F_x在E_x中关于给定的 Riemann 度量的正交补空间．如果记

$$F^\perp=\coprod_{x\in X}F_x^\perp,$$

那么$F^\perp$是E的子向量丛，并且

$$E=F\oplus F^\perp.$$

证明 取E的局部平凡化$h:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$，使得

$$h(\pi^{-1}(U)\cap F)=U\times(\mathbb{R}^m\times\{0\}).$$

由h决定了E在U上的一个标架场

$$s_i(x)=h^{-1}(x,\delta_i),\quad i=1,\cdots,k,$$

其中前m个向量生成$F_x(\forall x\in U)$．用 Gram-Schmidt 手续将标

架场

(3.1) $$s_1(x), \cdots, s_m(x), \cdots, s_k(x)$$

正交化，得到规范正交标架场

(3.2) $$\sigma_1(x), \cdots, \sigma_m(x), \cdots, \sigma_k(x),$$

其中的前 m 个向量仍生成 $F_x(\forall x \in U)$，而后 $k-m$ 个向量则生成 $F_x^{\perp}$ $(\forall x \in U)$.

因为标架场(3.1)与(3.2)之间的变换是 C^r 的，所以标架场(3.2)与原来的各个局部标架场 C^r 相容．用(3.2)作出 E 的局部平凡化，则可看出：$F^{\perp}$ 是 E 的子向量丛，并且

$$E = F \oplus F^{\perp}. \qquad \square$$

3.7 定理 设 M 是 N 的 C^r 子流形，则 TM 是 $T_M N$ 的 C^{r-1} 子向量丛.

证明 在任意的 $p \in M$ 邻近，取 N 的关于 M 正则的局部坐标图卡 (V, ψ)．对这局部坐标，$T_V N$ 具有标架场

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n},$$

而 $T_{M \cap V} M$ 则由

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$$

所生成． $\square$

3.8 注记 设 M 是 N 的 C^r 子流形，β 是 TN 的 C^{r-1}-Riemann 度量，则 β 限制在 TM 上也是 TM 的 Riemann 度量．因为任何微分流形 M 都可作为适当的 $\mathbb{R}^k$ 的子流形 $(k \geqslant 2\dim M + 1)$，所以平凡丛 $T\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ 纤维上的 Euclid 内积在 TM 上诱导了一个 Riemann 度量．这用另一种办法证明了切丛的 Riemann 度量的存在性．

§4　管状邻域定理

先介绍一个简单的定义.

4.1 定义　设 Y 是拓扑空间，B 是 Y 的子空间. 如果连续映射 $r: Y \to B$ 满足条件

$$r(b)=b, \quad \forall b\in B,$$

那么我们就称 B 为 Y 的收缩核，并称 r 为(从 Y 到 B 的)收缩映射.

设 $(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$ 是一个 C^r 向量丛. 约定以 0_x 表示向量空间 $E_x=\pi^{-1}(x)$ 中的零向量，我们来考察这样一个截面:

$$\zeta(x)=0_x, \quad \forall x\in X.$$

这样定义的截面被称为向量丛 E 的零截面. 零截面显然是 C^r 的. 约定记

$$X_0=\zeta(X)=\{0_x | x\in X\}.$$

在不致于混淆的时候，人们也常马马虎虎地把零截面的像集 X_0 叫做"零截面". 对于 E 是 C^r 向量丛的情形，X_0 是 E 的 C^r 子流形，因为在局部平凡表示下有

$$h(\pi^{-1}(U)\cap X_0)=U\times 0.$$

因为存在互逆的 C^r 映射 $\pi|X_0: X_0\to X$ 和 $\zeta: X\to X_0$，所以零截面子流形 X_0 实际上 C^r 微分同胚于 X.

我们看到，映射 $\zeta: X\to X_0\subset E$ 实际上将 X 嵌入到 E 中作为正则子流形. 因为这个缘故，人们常常将 X_0 与 X 等同视之.

E 作为 X_0 的开邻域具有非常好的性质: 存在 C^r 收缩映射

$$r=\zeta\circ\pi: E\to X_0.$$

下面将要介绍的"管状邻域"，正是以这种情形作为模式的.

为了证明"管状邻域定理"，先要做一些准备.

4.2 引理 设 X 和 Y 是距离空间，X 具有局部紧致性质并且满足第二可数公理，A 是 X 的闭子集．设连续映射 $\psi: X\to Y$ 满足以下两个条件：

(i) $\psi: X\to Y$ 是局部同胚(即对任意的 $x_0\in X$, ψ 将 x_0 点在 X 中的某个开邻域 U 同胚地映成 $\psi(x_0)$ 点在 Y 中的某个开邻域 $V=\psi(U)$)；

(ii) $\psi|A$ 是单映射，

则存在 A 在 X 中的开邻域 G 和 $B=\psi(A)$ 在 Y 中的开邻域 $H=\psi(G)$, 使得 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的同胚．

证明 首先指出：在所给的条件下，$\psi|A$ 是从 A 到 B 的同胚映射．事实上，根据条件(i)，$\psi: X\to Y$ 是局部同胚映射，因而 $\psi|A: A\to B$ 也是局部同胚映射．另一方面，根据条件(ii)，$\psi|A: A\to B$ 还是一一对应．依据这两方面的事实，即可判定 $\psi|A: A\to B$ 是同胚映射．

约定将 X 中的距离函数记为 d. 对于 $\delta>0$ 和 $C\subset X$, 我们约定记

$$D(C,\delta):=\{x\in X\mid d(x,C)<\delta\}.$$

下面，分步骤(Ⅰ)，(Ⅱ)和(Ⅲ)证明引理的结论．

(Ⅰ) 先设 A 是紧致集．将用反证法确认：存在 A 在 X 中的开邻域 G, 使得 $\psi|G$ 是单映射．

假如不是这样，则对任意 $n\in\mathbb{N}$, 在开集 $D(A,1/n)$ 之中，存在点 p_n 和 q_n, 使得 $p_n\neq q_n$, $\psi(p_n)=\psi(q_n)$．设 $p_n', q_n'\in A$, 满足不等式

$$d(p_n,p_n')<1/n,\quad d(q_n,q_n')<1/n.$$

由于 A 的紧致性，存在$\{p_n'\}$和$\{q_n'\}$的收敛子序列$\{p_{n_k}'\}$和$\{q_{n_k}'\}$．设

$$p_{n_k}'\to p_0,\quad q_{n_k}'\to q_0.$$

则也有

$$p_{n_k}\to p_0,\quad q_{n_k}\to q_0.$$

于是

$$\psi(p_0)=\psi(q_0),$$

但 $p_0, q_0\in A$, 并且 $\psi|A$ 是单映射，所以

$$p_0 = q_0.$$

根据条件(i),存在点 $p_0=q_0$ 的开邻域 U,使得 $\psi|U$ 是单映射. 而对于充分大的 k,点 p_{n_k} 和 q_{n_k} 都将进入 U 中,导致矛盾.

(Ⅱ) 对于 A 的一般情形,设 A_0 是 A 的一个紧致子集. 根据(Ⅰ)中的讨论,存在 A_0 在 X 中的开邻域 G_0,使得 $\psi|G_0$ 是单映射. 由于 X 是局部紧致空间,必要时适当缩小 G_0,不妨设 $\overline{G}_0$ 是紧致集. 下面将进一步证明:存在 A_0 在 X 中的开邻域 $G_* \subset \overline{G}_* \subset G_0$(因而 $\overline{G}_*$ 也是紧致集),使得 $\psi|(\overline{G}_* \cup A)$ 是单映射.

先取 $n_0 \in \mathbf{N}$,使得

$$n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow D(A_0, 1/n) \subset G_0.$$

只须证明:存在 $n \geqslant n_0$,使得

$$\psi|(D(A_0, 1/n) \cup A)$$

是单映射,因而

$$G_* = D(A_0, 1/2n)$$

满足全部要求.

论证仍采用反证法. 假设所述的 n 不存在,则对任何 $n \geqslant n_0$,都有

$$p_n, q_n \in D(A_0, 1/n) \cup A,$$

使得

$$p_n \neq q_n, \quad \psi(p_n) = \psi(q_n).$$

不妨设

$$p_n \in D(A_0, 1/n) \setminus A, \quad q_n \in A \setminus G_0.$$

于是,存在 $p_n' \in A_0$,使得 $d(p_n, p_n') < 1/n$(参看图 9). 由于 A_0 的紧致性,存在$\{p_n'\}$的子序列$\{p_{n_k}'\}$,使得

$$p_{n_k}' \to p \in A_0.$$

于是也有

$$p_{n_k} \to p \in A_0.$$

因为 $\psi(q_{n_k}) = \psi(p_{n_k})$,所以

$$\psi(q_{n_k}) \to \psi(p) \in B.$$

但 $\psi|A$ 是从 A 到 B 的同胚映射,所以

$$q_{n_k} \to p \in A_0.$$

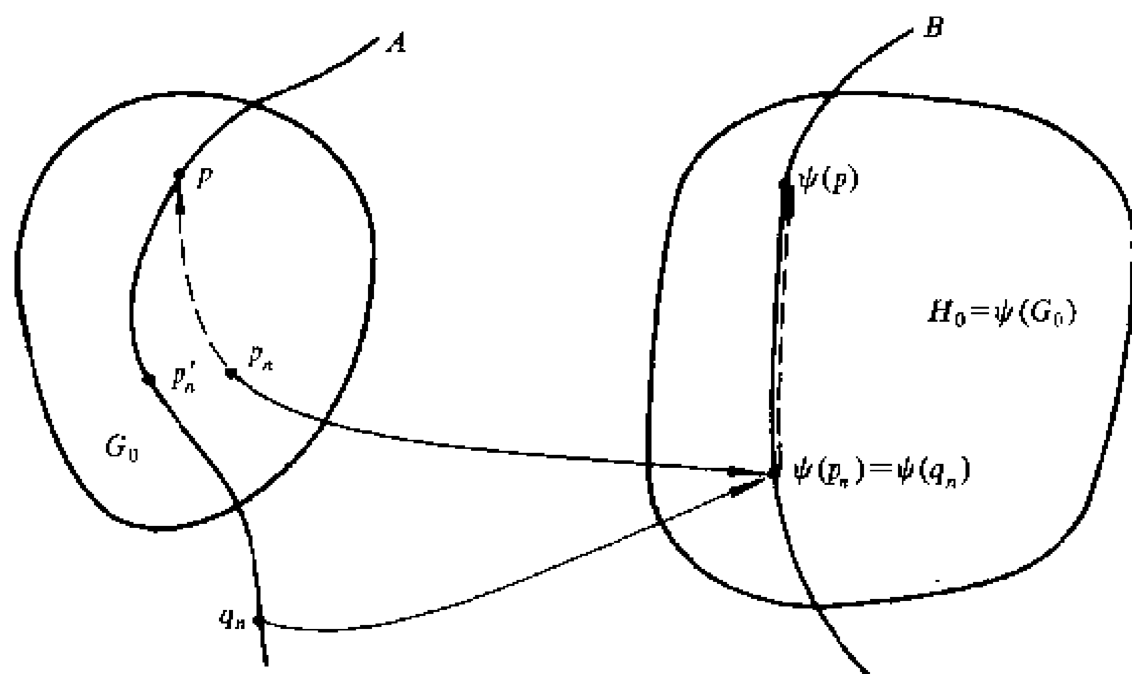


图 9

于是，当 k 充分大时，就会有 $q_{n_k}\in G_0$. 这与关于$\{q_n\}$的约定相矛盾.

(Ⅲ) 对于引理所设的一般情形，A 可以表示成可数个紧致集的并集：

$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\quad A_j \text{ 紧致}.$$

不妨设

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset A_{k+1}\subset\cdots.$$

根据(Ⅱ)中的讨论，存在 A_1 的开邻域 G_1，其闭包$\overline{G}_1$ 是紧致集，并且 $\psi|(\overline{G}_1\cup A)$ 是单映射. 假设已经定义好了开集

$$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k,$$

其中各开集 G_j 的闭包$\overline{G}_j$ 是紧致集，并且 $\psi|(\overline{G}_j\cup A)$ 是单映射. 我们分别将$\overline{G}_k\cup A_{k+1}$ 和$\overline{G}_k\cup A$ 当作(Ⅱ)中所讨论的“A_0”和“A”，又可以断定存在开集 $G_{k+1}\supset\overline{G}_k\cup A_{k+1}$，其闭包$\overline{G}_{k+1}$ 是紧致集，并且 $\psi|(\overline{G}_{k+1}\cup A)$ 是单映射. 在归纳地定义了递增的开集序列

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_k \subset G_{k+1} \subset \cdots$$

之后,我们记

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

显然有

$$G \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A,$$

并且 $\psi|G$ 是单映射.

以上证明了:存在 A 的开邻域 G,使得 $\psi|G$ 是单映射. 由于 ψ 在各点邻近是局部同胚,所以 $H=\psi(G)$ 是开集,并且 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的同胚映射. □

4.3 引理 设 N 是 $\mathbb{R}^p$ 的 C^∞ 子流形, $E=(TN)^\perp$ 是 TN 在 $T_N\mathbb{R}^p$ 中的正交补丛, $\pi: E \to N$ 是向量丛投影,映射 $\psi: E \to \mathbb{R}^p$ 定义为

$$\psi(\xi)=\pi(\xi)+\xi, \quad \forall \xi \in E$$

(即 $\psi(\xi)=x+\xi, \quad \forall \xi \in (TN)_x^\perp, \quad x \in N$). 则存在 E 中零截面子流形 Z 的开邻域 G 和 $\mathbb{R}^p$ 中 N 的开邻域 $H=\psi(G)$,使得 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的 C^∞ 同胚.

证明 对任意的 $0_x \in Z$ 和 $\psi(0_x)=x \in N$,我们来考察切映射

$$(\mathrm{d}\psi)_{0_x}: (TE)_{0_x} \to \mathbb{R}^p=(TN)_x \oplus (TN)_x^\perp .$$

因为 $\psi|Z$ 是从 Z 到 N 的 C^∞ 同胚,所以

$$(\mathrm{d}\psi)_{0_x}|(TZ)_{0_x}: (TZ)_{0_x} \to (TN)_x$$

是线性同构. 另一方面, $(\mathrm{d}\psi)_{0_x}|(T_{0_x}E_x)$ 显然是从 $T_{0_x}E_x$ 到 $(TN)_x^\perp$ 的线性同构. 借助于局部平凡表示,容易看出

$$(TE)_{0_x}=(TZ)_{0_x} \oplus T_{0_x}E_x.$$

由此得知, $(\mathrm{d}\psi)_{0_x}$ 是从 $(TE)_{0_x}$ 到 $\mathbb{R}^p=(TN)_x \oplus (TN)_x^\perp$ 的线性同构.

于是,存在 Z 在 E 中的一个开邻域 X,使得对所有的 $\xi \in X$,切映射 $(\mathrm{d}\psi)_\xi$ 都是线性同构. 我们确认:

(i) 映射 ψ 在 X 上是局部 C^∞ 同胚;

(ii) $\psi|Z$ 是从 Z 到 N 的 C^∞ 同胚.

根据引理 4.2, 存在 Z 的开邻域 $G\subset X$, 使得 $H=\psi(G)$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的开集,并且 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的同胚. 又因为 ψ 在 X 上是局部 C^∞ 同胚,所以 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的 C^∞ 同胚. □

附注 考察引理 4.3 中所定义的映射:

$$\psi(\xi)=x+\xi,\quad \xi\in E=(TN)^\perp,\quad x=\pi(\xi)\in N.$$

应该指出: 这里的 x 是 N 的点在 $\mathbb{R}^p$ 中的位置向量, ξ 则为 $\mathbb{R}^p$ 中 N 在 x 点的任意一个法向量,符号"+"则表示 $\mathbb{R}^p$ 中的向量加法.

为了理解引理 4.3 及其证明,需要弄清"抽象的丛"与其"具体表现"之间的区别和联系. 例如,作为抽象的切丛, TN 在不同点上的纤维是不相交的. 然而,作为其具体表现, N 在 x 点的切空间 T_xN 被看作是 $\mathbb{R}^p$ 中附着于 x 点的一个 n 维平面 ($n=\dim N$),附着于不同点的切空间则有可能相交(想一想曲线或曲面的例子). 在引理 4.3 及其证明的表述中,作为"抽象的"法丛, $E=(TN)^\perp$ 的各纤维("抽象的"法空间)两两不相交. ψ 的像集则是 $E=(TN)^\perp$ 在 $\mathbb{R}^p$ 中的具体表现,附着于 N 的不同点的"具体的"法空间有可能相交. 需要证明的关键事实是: ψ 能够将 E 中零截面 Z 的某个开邻域 G 同胚地映为 $\mathbb{R}^p$ 中 N 的某个开邻域 H. 对此可作如下的几何解释: 限制在 H 的范围内,附着于 N 的不同点的各个法空间两两不相交,并且这些法空间完全覆盖了 H(参看图 10).

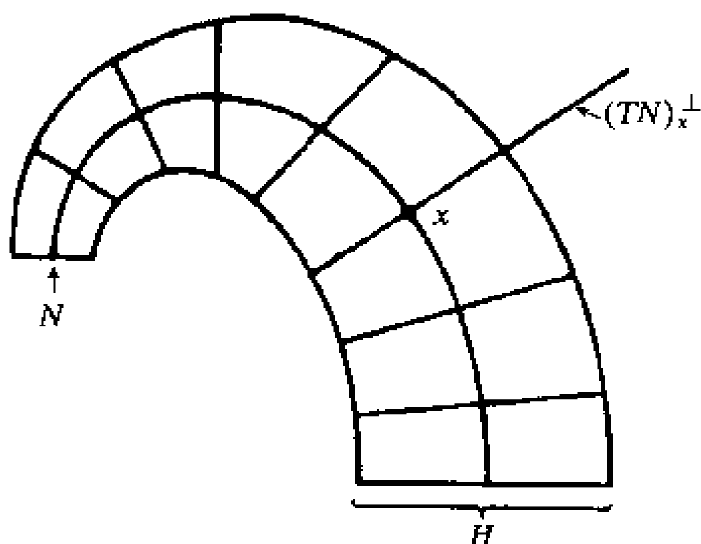


图 10

4.4 引理 设 $(E, X, \pi, \mathbb{R}^k)$ 是一个 C^∞ 向量丛，赋有 C^∞ - Riemann 度量 β，Z 是 E 的零截面子流形，G 是 Z 的开邻域．则存在正值 C^∞ 函数 $\varepsilon: X \to \mathbb{R}$，使得

$$\Delta_\varepsilon = \{\xi \in E \mid |\xi| < \varepsilon(\pi\xi)\} \subset G,$$

这里的 $|\cdot|$ 是由 Riemann 度量 β 决定的范数．

证明 首先指出这样的事实：

(Ⅰ) 对任意的 $q \in X$，存在 q 在 X 中的开邻域 Q 和正实数 δ，使得

$$\{\xi \in \pi^{-1}(Q) \mid |\xi| < \delta\} \subset G.$$

为了证明 (Ⅰ)，我们先取含有 q 点的局部平凡域 D 和相应的局部平凡化 $h: \pi^{-1}(D) \to D \times \mathbb{R}^k$．因为 $h(\pi^{-1}(D) \cap G)$ 是 $D \times \mathbb{R}^k$ 中零截面的开邻域，所以可取 q 点的闭包为紧致集的开邻域 $Q \subset \overline{Q} \subset D$ 和正实数 γ，使得

$$\{(x, v) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^k \mid \|v\| < \gamma\} \subset h(\pi^{-1}(D) \cap G).$$

约定记

$$\lambda(x, v) = |h^{-1}(x, v)|, \quad \forall (x, v) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^k,$$
$$S^{k-1} = \{v \in \mathbb{R}^k \mid \|v\| = 1\}.$$

因为连续函数 λ 在紧致集 $\overline{Q} \times S^{k-1}$ 上取得正的最小值，所以存在常数 $\mu > 0$，使得

$$\lambda(x, v) \geqslant \mu, \quad \forall (x, v) \in \overline{Q} \times S^{k-1}.$$

由此易得

$$\lambda(x, v) \geqslant \mu \|v\|, \quad \forall (x, v) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^k.$$

取 $\delta = \mu\gamma$，则有

$$\lambda(x, v) = |h^{-1}(x, v)| < \delta \Longrightarrow \|v\| < \gamma.$$

由此得知

$$h(\{\xi \in \pi^{-1}(Q) \mid |\xi| < \delta\}) \subset \{(x, v) \in \overline{Q} \times \mathbb{R}^k \mid \|v\| < \gamma\}$$
$$\subset h(\pi^{-1}(D) \cap G),$$

因而

$$\{\xi \in \pi^{-1}(Q) \mid |\xi| < \delta\} \subset G.$$

根据(Ⅰ)的结论,存在 X 的开覆盖 $\mathscr{Q}=\{Q\}$ 和相应的一族正实数 $\{\delta_Q\}$,使得

$$\{\xi\in\pi^{-1}(Q)\mid|\xi|<\delta_Q\}\subset G.$$

于是又存在 X 的可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i, W_i ($W_i\subset V_i\subset U_i$),使得

(1) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族, $\mathscr{U}<\mathscr{Q}$;

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1\ (i=1,2,\cdots)$;

(3) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 X.

对每一个 U_i, 存在 $\delta_i>0$, 使得

$$\{\xi\in\pi^{-1}(U_i)\mid|\xi|<\delta_i\}\subset G.$$

为了得到引理的结论,还须证明

(Ⅱ) 存在正值 C^∞ 函数 $\varepsilon: X\to\mathbb{R}$, 使得

$$\varepsilon(x)<\delta_k,\quad \forall x\in W_k,\ k\in\mathbb{N}.$$

为此,我们选取单位分解 $\{\lambda_i\}\subset C_c^\infty(X,\mathbb{R})$,使得

$$W_k\subset\{x\in X\mid\lambda_k(x)>0\}\subset\operatorname{supp}\lambda_k\subset V_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

对于 $j\in\mathbb{N}$, 约定记

$$\varepsilon_j=\min\{\delta_k\mid\overline{V}_k\cap\overline{V}_j\neq\varnothing\},\quad j=1,2,\cdots.$$

然后定义

$$\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\lambda_j(x).$$

对于 $x\in W_k$, 显然有

$$\varepsilon(x)=\sum_{\overline{V}_j\cap\overline{V}_k\neq\varnothing}\varepsilon_j\lambda_j(x)\leqslant\delta_k\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(x)=\delta_k.$$

这样,我们证明了

$$\Delta_\varepsilon=\{\xi\in E\mid|\xi|<\varepsilon(\pi\xi)\}\subset G.\qquad\square$$

综合引理 4.2, 引理 4.3 和引理 4.4 的讨论,我们已经证明了下面的未加修饰的"管状邻域定理"(又称 ε-管状邻域定理).

4.5 定理 设 N 是 $\mathbb{R}^p$ 的 C^∞ 子流形, $E=(TN)^\perp$ 是 TN 在

$T_N\mathbb{R}^p$ 中的正交补丛，$\pi: E \to N$ 是丛的投影，映射 $\psi: E \to \mathbb{R}^p$ 定义为

$$\psi(\xi) = \pi(\xi) + \xi, \quad \forall \xi \in E.$$

则存在正值 C^∞ 函数 $\varepsilon: N \to \mathbb{R}$，使得 $\Omega = \psi(\Delta_\varepsilon)$ 是 N 在 $\mathbb{R}^p$ 中的开邻域，并且 $\psi|\Delta_\varepsilon$ 是从 Δ_ε 到 Ω 的 C^∞ 同胚，这里

$$\Delta_\varepsilon = \{\xi \in E \mid \|\xi\| < \varepsilon(\pi\xi)\},$$

其中的 $\|\cdot\|$ 是由 $\mathbb{R}^p$ 中的 Euclid 度量决定的范数. 如果定义 $\rho = \pi \circ \psi^{-1}$（参看图 11），那么 $\rho: \Omega \to N$ 是 C^∞ 映射，并且满足

$$\rho(x) = x, \quad \forall x \in N. \tag{4.1}$$

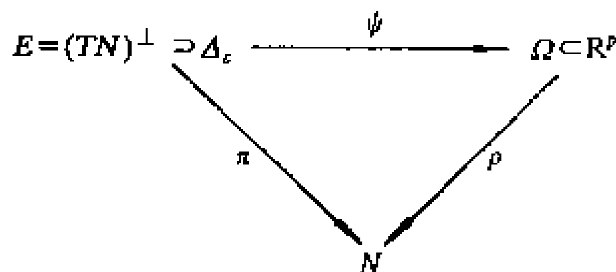


图 11

定理 4.5 中的 Ω 被称为 N 在 $\mathbb{R}^p$ 中的管状邻域，$\rho: \Omega \to N$ 被称为管状邻域 Ω 的收缩映射（或管状投影映射）.

附注 由 (4.1) 式可以看出，$\rho: \Omega \to N$ 是 C^∞ 淹没映射. 事实上，切映射 $\mathrm{d}\rho$ 限制到 $(TN)_x$ 上是该空间的恒同映射. 本章后的附录 β 将要用到这一结论.

下面的定理 4.6 是管状邻域定理的修饰完成的形式.

4.6 定理 设 N 是 $\mathbb{R}^p$ 的 C^∞ 子流形，$E = (TN)^\perp$ 是 TN 在 $T_N\mathbb{R}^p$ 中的正交补丛，$\pi: E \to N$ 是向量丛投影. 则存在 N 在 $\mathbb{R}^p$ 中的开邻域 Ω 和从 E 到 Ω 的 C^∞ 微分同胚

$$\omega: E = (TN)^\perp \to \Omega,$$

使得

$$\omega(0_x) = x, \quad \forall x \in N,$$

并且存在从 Ω 到 N 的 C^∞ 收缩映射 $\rho: \Omega \to N$，使得以下图表

可交换(图 12).

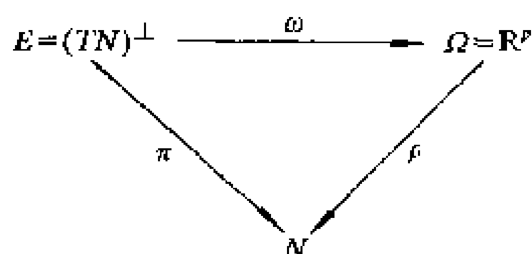


图 12

证明 根据定理 4.5, 存在正值 C^∞ 函数

$$\varepsilon: N \to \mathbb{R},$$

使得 $\Omega=\psi(\Delta_\varepsilon)$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的开集,并且 $\psi|\Delta_\varepsilon$ 是从 Δ_ε 到 Ω 的 C^∞ 同胚;还存在 C^∞ 收缩映射 $\rho: \Omega \to N$, 使得图表 11 可交换(这里沿用上一定理的记号).

我们构造这样一个从 $E=(TN)^\perp$ 到 Δ_ε 的 C^∞ 映射:

$$\theta(\xi)=\frac{\varepsilon(\pi\xi)}{\sqrt{1+\|\xi\|^2}}\,\xi.$$

容易看出, θ 的逆映射为

$$\theta^{-1}(\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{(\varepsilon(\pi\eta))^2-\|\eta\|^2}},$$

并且 $\theta^{-1}: \Delta_\varepsilon \to E$ 也是 C^∞ 映射. 因此 $\theta: E \to \Delta_\varepsilon$ 是 C^∞ 同胚. 显然 θ 满足等式 $\pi\circ\theta=\pi$, 因而有交换图表(图 13):

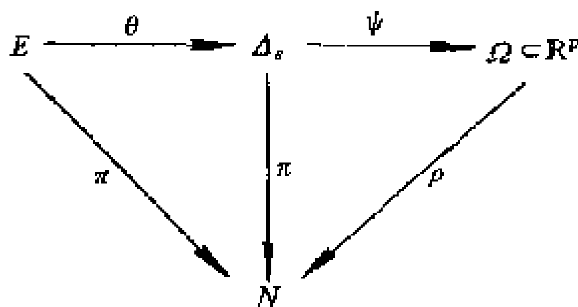


图 13

如果记 $\omega=\psi\circ\theta$, 那么 $\omega: E\to\Omega$ 和 $\rho: \Omega\to N$ 满足定理结论的要求: ω 是从 $E=(TN)^{\perp}$ 到 Ω 的 C^{∞} 同胚, ρ 是从 Ω 到 N 的 C^{∞} 收缩映射,并且定理所述的图表(图 12)可交换. □

§5 映射的光滑化与同伦的光滑化

有了管状邻域定理,仿照 §1 中的范例,就可以顺利地解决映射的光滑化问题.

5.1 引理 设 M 是光滑流形, $f: M\to\mathbb{R}^p$ 是连续映射, γ 是任意给定的正实数. 则存在光滑映射 $g: M\to\mathbb{R}^p$, 使得

$$\|g(x)-f(x)\|<\gamma,\quad \forall x\in M.$$

(这已在 §1 中证明过了!)

5.2 引理 设 K 是 $\mathbb{R}^p$ 中的紧致集, Ω 是 K 的开邻域, 则存在 $\delta>0$, 使得

$$K_\delta=\{x\in\mathbb{R}^p\,|\,d(x,K)\leqslant\delta\}\subset\Omega.$$

证明 留作练习. □

5.3 定理 设 M 是紧致光滑流形, N 是光滑流形, $f: M\to N$ 是连续映射, ε 是给定正实数. 则存在光滑映射 $g: M\to N$, 使得

(1) $d(g(x), f(x))<\varepsilon$, $\forall x\in M$;

(2) $g\simeq f$.

证明 记 $p=2\dim N+1$, 将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^p$ 之中. 设 Ω 是 N 在 $\mathbb{R}^p$ 中的管状邻域, $\rho: \Omega\to N$ 是相应的收缩映射. 对于 $K=f(M)$ 和 Ω, 按照引理 5.2 确定正数 δ, 并记

$$K_\delta=\{x\in\mathbb{R}^p\,|\,\exists\,\xi\in K:\ \|x-\xi\|\leqslant\delta\}.$$

因为 ρ 限制在紧致集 K_δ 上具有一致连续性,所以存在 $\sigma>0$, 使得只要

$$y_1, y_0\in K_\delta,\quad \|y_1-y_0\|<\sigma,$$

就有

$$\|\rho(y_1)-\rho(y_0)\|<\varepsilon.$$

根据引理 5.1, 存在光滑映射 $g_0: M \to \mathbf{R}^p$, 适合条件

$$\|g_0(x)-f(x)\|<\min(\delta,\sigma), \quad \forall x\in M.$$

我们定义

$$h_0(t,x)=(1-t)g_0(x)+tf(x), \quad \forall t\in I,\ x\in M.$$

显然有

$$\|h_0(t,x)-f(x)\|<\delta, \quad \forall t\in I,\ x\in M.$$

因为

$$g_0(M)\subset \Omega, \quad h_0(I\times M)\subset \Omega,$$

所以可以定义

$$g=\rho\circ g_0, \quad h=\rho\circ h_0.$$

这样得到

$$g\in C^\infty(M,N), \quad h\in C^0(I\times M,N).$$

容易验证:

(1) $\|g(x)-f(x)\|<\varepsilon, \quad \forall x\in M$;

(2) $g \overset{h}{\simeq} f$. □

再来考察同伦的光滑化问题.

5.4 定义 设 $f_0, f_1: M\to N$ 是光滑映射, $I=[0,1]$ 是实数区间. 如果存在光滑映射 $F: I\times M\to N$, 使得对于某个 $\gamma\in(0,1/3]$ 有

$$F(t,x)=f_0(x), \quad \forall t\in[0,\gamma],\ x\in M,$$
$$F(t,x)=f_1(x), \quad \forall t\in[1-\gamma,1],\ x\in M,$$

那么我们就说 f_0 光滑同伦于 f_1, 记为

$$f_0\simeq f_1 \quad (C^\infty).$$

如有必要指明具体的同伦 F, 则可写成

$$f_0 \overset{F}{\simeq} f_1 \quad (C^\infty).$$

在上面的定义中, 要求在 t 开始的一个区段 F 等于 f_0, 在 t 终了的一个区段 F 等于 f_1. 这样的规定使得我们能够很容易地验证: 如此定义的光滑同伦关系是一种等价关系(特别是: 光滑同伦关系具有"传递性").

5.5 引理 设 δ 是任意给定的正实数, M 是紧致光滑流形,

$f_0, f_1: M \to \mathbb{R}^p$ 是光滑映射，$F: I\times M \to \mathbb{R}^p$ 是连续映射，满足条件

$$F(t,x)=f_0(x), \quad \forall t\in[0,1/3],\ x\in M,$$
$$F(t,x)=f_1(x), \quad \forall t\in[2/3,1],\ x\in M.$$

则存在光滑映射 $G: I\times M \to \mathbb{R}^p$，满足条件

$$G(t,x)=f_0(x), \quad \forall t\in[0,1/9],\ x\in M,$$
$$G(t,x)=f_1(x), \quad \forall t\in[8/9,1],\ x\in M,$$
$$\|G(t,x)-F(t,x)\|<\delta, \quad \forall t\in I,\ x\in M.$$

证明 首先取 $\lambda\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$，满足条件

$$\lambda(t)=\begin{cases}1, & \forall t\in[2/9,7/9],\\ 0, & \forall t\in[0,1/9]\cup[8/9,1].\end{cases}$$

其次，对乘积流形 $(0,1)\times M$ 和连续映射 $F|((0,1)\times M)$ 引用引理 5.1，可知存在光滑映射 $\widetilde{F}: (0,1)\times M\to\mathbb{R}^p$，使得

$$\|\widetilde{F}(t,x)-F(t,x)\|<\delta, \quad \forall t\in(0,1),\ x\in M.$$

我们定义

$$G(t,x)=(1-\lambda(t))F(t,x)+\lambda(t)\widetilde{F}(t,x).$$

则显然 $G: I\times M\to\mathbb{R}^p$ 满足引理所陈述的所有要求． □

5.6 定理 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$f_0, f_1: M\to N$是光滑映射．如果 f_0 连续同伦于 f_1，那么 f_0 也就光滑同伦于 f_1．

证明 记 $p=2\dim N+1$，首先将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^p$ 之中．

设 F_0 是 f_0 与 f_1 之间的连续同伦．我们定义

$$F(t,x)=\begin{cases}F_0(0,x), & 若\ t\in[0,1/3],\\ F_0(3t-1,x), & 若\ t\in[1/3,2/3],\\ F_0(1,x), & 若\ t\in[2/3,1].\end{cases}$$

F_0 和 F 都可看成是从 M 到 $\mathbb{R}^p$ 的映射．设 Ω 是N 在$\mathbb{R}^p$ 中的管状邻邻域，$\rho: \Omega\to N$ 是相应的收缩映射．对于 $K=F(I\times M)=F_0(I\times M)$ 和 Ω 利用引理 5.2 确定一个正数 δ．根据引理 5.5，存在光滑映射 $G: I\times M\to\mathbb{R}^p$，满足条件

$$G(t,x)=f_0(x), \quad \forall t\in[0,1/9],\ x\in M,$$
$$G(t,x)=f_1(x), \quad \forall t\in[8/9,1],\ x\in M,$$
$$\|G(t,x)-F(t,x)\|<\delta, \quad \forall t\in I,\ x\in M.$$
如果令
$$H=\rho\circ G: I\times M\to N,$$
那么显然 H 是 f_0 与 f_1 之间的光滑同伦. □

附录 β　更一般的管状邻域定理

定理　设 N 是光滑流形，M 是 N 的光滑子流形，$\dim N=n$，$\dim M=m<n$．则存在

(1) 以 M 为底的光滑向量丛 $(\Gamma, M, \pi, \mathbf{R}^{n-m})$，

(2) M 在 N 中的开邻域 Λ，

(3) 光滑同胚 $\lambda: \Gamma\to\Lambda$，

使得
$$\lambda(0_x)=x, \quad \forall x\in M.$$
于是 $r=\pi\circ\lambda^{-1}: \Lambda\to M$ 是光滑的收缩映射，使得图 14 中所示图表可交换．

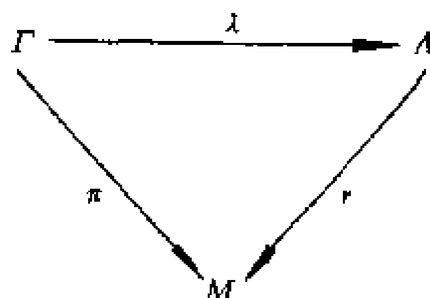


图　14

证明(简述)　记 $p=2n+1$．将 N 视为 $\mathbb{R}^p$ 的光滑子流形．于是，根据引理 4.4，存在 N 在 $\mathbb{R}^p$ 中的开邻域 Ω 和光滑的收缩映射 $\rho: \Omega\to N$．

以 Γ 表示 TM 在 T_MN 中的正交补丛．考察从 Γ 到 $\mathbb{R}^p$ 中的

映射

$$\psi_0(\xi)=x+\xi,\quad \forall\xi\in\Gamma_x,\ x\in M.$$

易知有 Γ 中零截面 Z 的开邻域 Q, 使得 $\psi_0(Q)\subset\Omega$. 我们定义

$$\psi=\rho\circ\psi.$$

则映射 $\psi: Q\to N$ 满足这样的条件:

(i) 在 Z 的某个开邻域 $X\subset Q$ 中, ψ 是局部 C^∞ 同胚;

(ii) $\psi|Z$ 是从 Z 到 M 的 C^∞ 同胚.

于是,我们可以仿照引理 4.3, 引理 4.4, 定理 4.5 和定理 4.6 中的做法,顺利地完成这个一般形式的"管状邻域定理"的证明. □

练 习 D

定义 如果 C^r 向量丛 $(E,X,\pi,\mathbb{R}^k)$ 可以由单独一个平凡化

$$h: E\to X\times\mathbb{R}^k$$

予以确定,那么就称这向量丛为可平凡化的向量丛. (有的文献直接了当地把这里所称的"可平凡化的向量丛"叫做"平凡丛".)

D.1. 试证 S^1 和 S^3 的切丛都是可平凡化的向量丛.

D.2. 试证任何李群的切丛都必定是可平凡化的向量丛.

D.3. 设 $\rho: \mathbb{R}^{n+1}\setminus 0\to S^n$ 是径向投影. 试证 $(\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0, S^n, \rho, \mathbb{R})$ 是一个可平凡化的向量丛.

D.4. 试证 $TS^n\oplus(S^n\times\mathbb{R})$ 是可平凡化的向量丛. (这里 TS^n 是 S^n 的切向量丛, $S^n\times\mathbb{R}$ 表示以 S^n 为底 $\mathbb{R}$ 为纤维的平凡丛.)

D.5. 试赋予(不带边的)Möbius 带适当的结构,使其成为以 S^1 为底, 以 $\mathbb{R}$ 为纤维型的向量丛 L. 试证这样的向量丛 L 是不可平凡化的,但 $L\oplus L$ 却是可平凡化的向量丛.

D.6. 试证以 $\mathbb{R}$ 为底空间的任何一个向量丛都是可平凡化的向量丛.

D.7. 设 X 是一个距离空间, K 是 X 的一个闭子集, N 是一个光滑流形, $f\in C^0(K,N)$. 试证存在 X 的开集 $U\supset K$ 和 $g\in C^0(U,N)$, 使得 $g|K=f$.

D.8. 试利用映射光滑化技术证明 $n\geqslant 2$ 时 S^n 是单连通的(即证明 S^n 的基本群 $\pi_1(S^n)$ 是平凡群).

D.9. 设 M 是紧致光滑流形，K 是 M 的非空闭子集；N 是光滑流形，S 是 N 的闭的光滑子流形. 如果 $f\in C^0(M,N)$ 适合条件 $f(K)\subset N\setminus S$, 那么存在 $g\in C^\infty(M,N)$ 和 $H\in C^0(I\times M,N)$, 使得

(1) $H(0,\cdot)=f(\cdot)$, $H(1,\cdot)=g(\cdot)$;

(2) $H(I\times K)\subset N\setminus S$.

第五章　正则值与横截性

§1　正则值与 Sard 定理

自从坐标法问世以来，人们热衷于研究各种方程式所表示的曲线或曲面．设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^r 映射．对这样一般的 f 和任意的 $b \in \mathbb{R}^n$，方程

$$f(x)=b$$

的解集合 $f^{-1}(b)$ 可能相当复杂，与通常曲线或曲面的几何直观大相径庭．因此有必要考察：哪些 $b \in \mathbb{R}^n$ 能保证 $f^{-1}(b)$ 成为 C^r 流形？这就引出了正则值的概念．

1.1　定义　设 M 和 N 是微分流形，N 的维数 $\dim N = n$．又设 $f: M \to N$ 是可微映射．

（Ⅰ）如果 $p \in M$ 使得

$$\operatorname{rank}_p f < n,$$

那么我们就称 p 为 f 的**临界点**．f 的全体临界点的集合记为 C_f 或者 $C(f)$.

如果 $p \in M$ 使得

$$\operatorname{rank}_p f = n,$$

那么我们就称 p 为 f 的**正则点**．f 的全体正则点的集合是 $M \setminus C_f = M \setminus C(f)$．

（Ⅱ）如果 $q \in N$ 使得

$$f^{-1}(q) \cap C_f \neq \varnothing,$$

那么我们就称 q 为 f 的**临界值**．

如果 $q \in N$ 使得

$$f^{-1}(q) \cap C_f = \varnothing,$$

那么我们就称 q 为 f 的**正则值**.

附注 f 的全体临界值的集合是 $f(C_f)$. f 的全体正则值的集合是 $N\setminus f(C_f)$（请注意：不是 $f(M\setminus C_f)$）. 在正则值的定义中，包括 $f^{-1}(q)=\varnothing$ 的情形，即："不是值"的 $q\in N$ 也属正则值之列.

下面的定理显示了正则值概念的重要性.

1.2 定理（正则值原像定理） 设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，$q\in f(M)$ 是 f 的正则值. 则 $S=f^{-1}(q)$ 是 M 的 C^r 正则子流形，并且

$$\dim S=\dim M-\dim N.$$

（显然 S 是 M 的闭子集，因而是闭子流形.）

证明 我们利用淹没映射的典范局部表示. 对任意的 $p_0\in S=f^{-1}(q)$，存在 p_0 点邻近的 M 的局部坐标图卡 (U,φ) 和 q 点邻近的 N 的局部坐标图卡 (V,ψ)，使得

$$\varphi(p_0)=0,\quad \psi(q)=0,\quad f(U)\subset V,$$

并且使得

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=\pi''|\varphi(U),$$

其中 $\pi'': \mathbb{R}^m=\mathbb{R}^{m-n}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是从乘积空间 $\mathbb{R}^{m-n}\times\mathbb{R}^n$ 到第二个因子空间 $\mathbb{R}^n$ 的投射. 因为

$$p\in U\cap f^{-1}(q)\Longleftrightarrow\varphi(p)\in\varphi(U)\cap\tilde{f}^{-1}(0),$$

所以

$$\varphi(U\cap f^{-1}(q))=\varphi(U)\cap\tilde{f}^{-1}(0)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^{m-n}\times 0).$$

（请注意：对于 $m=n$ 的情形，结论仍成立.） □

1.3 例 设映射 $f: \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^1$ 定义为

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2.$$

易验证：f 是光滑映射，任何实数 $\rho\neq 0$ 都是 f 的正则值，并且对 $\rho>0$ 有 $f^{-1}(\rho)\neq\varnothing$. 于是，对于 $\rho>0$，可以断定 $f^{-1}(\rho)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑的 n 维正则子流形. 特别地，$S^n=f^{-1}(1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑的 n 维正则子流形.

下面的"唱片引理"是正则值原像定理的重要特殊情形（在以

后的讨论中，将多次用到这一重要引理）.

1.4 引理(唱片引理) 设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r\geq 1)$，M 是紧致的，$\dim M=\dim N$. 又设 $f: M\to N$ 是 C^r 映射. 如果 $q\in N$ 是 f 的正则值并且 $f^{-1}(q)\neq\varnothing$，那么

(1) $f^{-1}(q)\subset M$ 是有限点集:

$$f^{-1}(q)=\{p_1,\cdots,p_k\};$$

(2) 存在 q 在 N 中的开邻域 V，使得

$$f^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

其中 $U_1,\cdots,U_k$ 是 M 中两两不相交的开集，$p_i\in U_i$，并且

$$f|U_i: U_i\to V$$

是 C^r 同胚 $(i=1,\cdots,k)$.

证明 根据定理 1.2（正则值原像定理），$f^{-1}(q)$ 是 M 的 0 维子流形，也就是由一些孤立点组成的子集. 但 $f^{-1}(q)$ 作为紧空间 M 的闭子集也是紧致的，所以 $f^{-1}(q)$ 是有限点集 $\{p_1,\cdots,p_k\}$，这证明了 (1).

因为

$$\operatorname{rank}_{p_i}f=\dim M=\dim N,$$

所以 f 在 p_i 点邻近是局部 C^r 同胚，即存在 p_i 在 M 中的开邻域 W_i 和 q 点在 N 中的开邻域 V_i，使得 $f|W_i: W_i\to V_i$ 是 C^r 同胚 $(i=1,\cdots,k)$. 必要时适当缩小各 W_i，可设这些 W_i 是两两不相交的:

$$W_i\cap W_j=\varnothing,\quad \forall\ i\neq j.$$

显然 $f\left(M\setminus\bigcup_{i=1}^{k}W_i\right)$ 是 N 中的紧致集并且不包含 q 点，所以

$$V=\left(\bigcap_{i=1}^{k}V_i\right)\setminus f\left(M\setminus\bigcup_{i=1}^{k}W_i\right)$$

是 q 点的开邻域. 我们记

$$U_i=W_i\cap f^{-1}(V),\quad i=1,\cdots,k.$$

则 $f|U_i: U_i \to V$ 是 C^r 同胚，并且显然有

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

这证明了 (2)． □

既然正则值具有如上面定理 1.2 所述的良好性质，人们自然关心这样的正则值是否足够多？下面的 Sard 定理肯定地回答了这个问题．

1.5 定理 (Sard 定理, C^∞ 情形) 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，$f\in C^\infty(M,N)$，$C(f)$ 是 f 的临界点集合．则 $f(C(f))$ 是 N 中的零测集．因而 f 的正则值在 N 中处处稠密．

Sard 定理是微分拓扑中许多重要存在定理的基础，其重要性是不言而喻的．但我们把 Sard 定理的证明放到本章后的附录 γ 中．因为证明方法虽然不算困难，却是以后较少用到的．

§2 横 截 性

横截性是正则值概念的延伸．有人曾说："横截性揭开了流形的秘密"．这一概念的重要性可想而知．

2.1 定义 设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，S 是 N 的 C^r 正则子流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，A 是 M 的任意一个子集．

(Ⅰ) 如果

$$a\in A\cap f^{-1}(S) \Longrightarrow f_{*a}(T_aM)+T_{f(a)}S=T_{f(a)}N, \tag{2.1}$$

那么我们就说 f 在 A 上与 S **横截**，记为

$$f \pitchfork_A S. \tag{2.2}$$

请注意，对于 $A\cap f^{-1}(S)=\varnothing$ (即 $f(A)\cap S=\varnothing$) 的情形，人们认为条件 (2.1) 自动成立 (这是逻辑上普遍采纳的一种约定)，因而认为 f 在 A 上也是与 S 横截的．

(Ⅱ) 对于 $A=\{p\}$ 是单点集的情形，如果条件 (2.1) 得以满足

(包括 $p\notin f^{-1}(S)$ 的情形)，那么我们就说 f 在 p 点与 S 横截，记为

$$f \pitchfork_p S.$$

(Ⅲ) 对于 $A=M$ 的情形，如果条件(2.1)得以满足(包括 $f(M)\cap S=\varnothing$ 情形)，那么我们就直接称 f 与 S 横截，并简单地记为

$$f \pitchfork S.$$

(Ⅳ) 对于 M 是 N 的 C^r 子流形，并且 $f=i: M\to N$ 是放入映射的情形，如果条件(2.1)得以满足，那么我们就说子流形 M 在 A 上与子流形 S 横截，记为

$$M \pitchfork_A S.$$

对于 $f=i: M\to N$ 是放入映射的情形，如果 $A=\{p\}$(单点集)或者 $A=M$，那么也有类似于(Ⅱ)或(Ⅲ)中的约定.

2.2 例 我们举出定义 2.1 的一些特例:

(a) 如果 $\dim M\geqslant \dim N$，并且 f 在 A 上是 C^r 淹没，那么对 N 的任何 C^r 子流形 S 都有

$$f \pitchfork_A S.$$

(b) 如果 $S=\{q\}$ 是 N 的单点子集(视为 0 维子流形)，那么 $f\pitchfork S$ 意味着 q 是 f 的正则值. 因此，我们可以用记号

$$f \pitchfork \{q\} \ (\text{或者} f \pitchfork q)$$

表示: q 是 f 的正则值.

(c) 如果 $\dim M+\dim S<\dim N$，那么 $f\pitchfork_A S$ 的充分必要条件是

$$f(A)\cap S=\varnothing.$$

下面的定理是"在某点横截"的一个重要的判别准则.

2.3 定理 设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，S 是 N 的 C^r 正则子流形,

$$\dim M=m, \quad \dim N=n, \quad \dim S=s.$$

又设 $f: M\to N$ 是 C^r 映射，$p\in f^{-1}(S)$，(Q,ψ) 是 N 在 $q=f(p)$ 点邻近的关于子流形 S 为正则的 C^r 局部坐标图卡，因而

$$\psi(Q\cap S)=\psi(Q)\cap(\mathbb{R}^s\times 0).$$

在上述前提下，f 在 p 点与 S 横截的充分必要条件为: 复合映射

$\pi'' \circ \psi \circ f$ 在 p 点是淹没，这里

$$\pi'': \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \to \mathbb{R}^{n-s}$$

是从乘积空间 $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ 到第二个因子空间 $\mathbb{R}^{n-s}$ 的投射．

证明 首先指出这样的事实：

$$f \pitchfork_p S \Longleftrightarrow \psi \circ f \pitchfork_p (\mathbb{R}^s \times 0).$$

其次，我们可以把 $\psi \circ f$ 写成

$$\psi \circ f = (\pi' \circ \psi \circ f,\ \pi'' \circ \psi \circ f)$$

（这里的 π' 是从 $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ 到 $\mathbb{R}^s$ 的投射）．于是，对于 $\xi \in T_pM$ 有

$$(\psi \circ f)_*(\xi) = ((\pi' \circ \psi \circ f)_*(\xi),\ (\pi'' \circ \psi \circ f)_*(\xi)).$$

因为

$$((\pi' \circ \psi \circ f)_*(\xi), 0) \in \mathbb{R}^s \times 0,$$

所以，要使 $(\psi \circ f)_*(T_pM)$ 与 $\mathbb{R}^s \times 0$ 共同生成

$$\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^s \times 0) \oplus (0 \times \mathbb{R}^{n-s}),$$

必须而且只须 $(0, (\pi'' \circ \psi \circ f)_*(T_pM))$ 盖满 $0 \times \mathbb{R}^{n-s}$，也就是

$$(\pi'' \circ \psi \circ f)_*(T_pM) = \mathbb{R}^{n-s}. \qquad \square$$

2.4 命题(横截的典范局部表示) 在定理 2.3 的条件下，若 f 在 p 点与 S 横截，则存在 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡 (P, φ)，使得 $f(P) \subset Q$，并且 f 的局部表示 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 具有以下形式：

$$\tilde{f}(u, v) = (\eta(u, v), v).$$

证明 如同定理 2.3 那样选择 q 点邻近 N 的图卡(Q, ψ)，使得 $\pi'' \circ \psi \circ f$在 p 点为淹没．然后选择 p 点邻近的 M 的图卡(P, φ)，使得 $\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 成为淹没的典范表示：

$$\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = v.$$

若记 $\eta(u, v) = \pi' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v)$，则有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = (\eta(u, v), v). \qquad \square$$

2.5 定理(横截原像定理) 设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r \geq 1)$，S 是 N 的 C^r 正则子流形，$f: M \to N$ 是 C^r 映射．如果 $f \pitchfork S$ 并且 $f^{-1}(S) \neq \varnothing$，那么 $f^{-1}(S)$ 是 M 的正则子流形，并且

$$\operatorname{codim} f^{-1}(S) = \operatorname{codim} S.$$

这里的符号 codim 表示子流形的余维数，即

$$\operatorname{codim} S=\dim N-\dim S,\quad \operatorname{codim} f^{-1}(S)=\dim M-\dim f^{-1}(S).$$

证明 设 $\dim M=m$, $\dim N=n$, $\dim S=s$. 根据定理 2.3, 对于任意的 $p_0\in f^{-1}(S)$, 存在 M 在 p_0 邻近的局部坐标图卡 (U,φ) 和 N 在 $q_0=f(p_0)$ 邻近的局部坐标图卡 (V,ψ)，使得 $f(U)\subset V$, 并且使得映射

$$\pi''\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\ U\to\mathbb{R}^{n-s}$$

成为淹没的典范局部形式：

$$\pi''\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_t,x_{t+1},\cdots,x_m)=(x_{t+1},\cdots,x_m),$$

其中 $t=m-n+s$, 即 $m-t=n-s$. 对于 $p\in U$, 我们有

$$\begin{aligned} p\in f^{-1}(S) &\Longleftrightarrow \psi\circ f(p)\in\psi(V)\cap(\mathbb{R}^s\times 0)\\ &\Longleftrightarrow \pi''\circ\psi\circ f(p)=0. \end{aligned}$$

因而

$$\varphi(U\cap f^{-1}(S))=(\pi''\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1})^{-1}(0)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^t\times 0).$$

这证明了 $f^{-1}(S)$ 是 M 的正则子流形，其维数为

$$\dim f^{-1}(S)=t=m-n+s,$$

也就是

$$\operatorname{codim} f^{-1}(S)=m-t=n-s.\qquad\square$$

§3 横截逼近定理

设 M 和 N 是 C^∞ 流形，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形. 本节将证明，对任意的光滑映射

$$f:M\to N,$$

存在这样的与 S 横截的光滑映射

$$g:M\to N,$$

g 可任意逼近 f, 并且 $g\sim f$.

设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，K 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致集，$K\subset U$. 对于 $f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$, 我们约定记

$$|f|_K^{(0)}=|f|_K=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in K}\{|f_i(x)|\},$$

$$|f|_K^{(1)}=\max\left\{|f|_K,\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_K,\cdots,\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_K\right\}.$$

3.1 引理 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，K 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致集，$K\subset U$，$f\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$．如果

(3.1) $$f \pitchfork_K (\mathbb{R}^s\times 0),$$

那么存在 $\gamma>0$，使得只要

$$g\in C^1(U,\mathbb{R}^n),\quad |g-f|_K^{(1)}<\gamma,$$

就有

(3.2) $$g\pitchfork_K(\mathbb{R}^s\times 0).$$

证明 设 f 的分量表示为 $f=(f_1,\cdots,f_s,f_{s+1},\cdots,f_n)$，则有

$$\pi''\circ f=(f_{s+1},\cdots,f_n).$$

我们约定以 $\Delta(f,x)$ 表示以下和式：

$$\sum_{i=s+1}^{n}(f_i(x))^2+\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant m}\left(\frac{\partial(f_{s+1},\cdots,f_n)}{\partial(x_{j_1},\cdots,x_{j_t})}\right)^2,$$

这里 $t=n-s$．由定理 2.3 可知，(3.1) 等价于

$$\Delta(f,x)>0,\quad \forall x\in K.$$

于是，存在 $\gamma>0$，使得只要

$$g\in C^1(U,\mathbb{R}^n),\quad |g-f|_K^{(1)}<\gamma,$$

就也有
$$\Delta(g,x)>0,\quad \forall x\in K.$$

这等价于 (3.2)． □

3.2 引理 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f\in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$，则对任何 $\gamma>0$，存在 $c\in\mathbb{R}^{n-s}$，$\|c\|<\gamma$，使得由

$$g_c(x)=f(x)-(0,c)$$

所定义的映射 g_c：$U\to\mathbb{R}^n$ 在 U 上与 $\mathbb{R}^s\times 0$ 横截，也就是

$$g_c\pitchfork_U(\mathbb{R}^s\times 0).$$

证明 根据 Sard 定理，映射 $\pi''\circ f$ 的正则值在 $\mathbb{R}^{n-s}$ 中稠密．因而可取 $\pi''\circ f$ 的正则值 $c\in\mathbb{R}^{n-s}$，使得 $\|c\|<\gamma$．容易看出：映射

$$\pi''\circ g_c(x)=\pi''\circ f(x)-c$$

以 $0\in\mathbb{R}^{n-s}$ 为正则值．这也就是

$$g_c\pitchfork_U(\mathbb{R}^s\times 0).\qquad\square$$

3.3 引理 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，H 是 M 中的紧致集，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，$\dim S=s$，$f\in C^\infty(M,N)$，又设

(i) $f\pitchfork_H S$；

(ii) $p_0\in f^{-1}(S)$，(Q,ψ) 是 N 在 $q_0=f(p_0)$ 邻近的关于 S 为正则的局部坐标图卡，(U,φ) 是 M 在 p_0 点邻近的局部坐标图卡，满足条件

$$\varphi(p_0)=0,\quad \varphi(U)=B_3,\quad f(U)\subset Q.$$

(我们记 $V=\varphi^{-1}(B_2)$，$W=\varphi^{-1}(B_1)$.)

在上述条件下，对任何 $\delta>0$，存在 $g\in C^\infty(M,N)$，使得

(1) $g(p)=f(p),\quad \forall p\in M\setminus V$，

(2) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上与 S 横截，

(3) $d(g(p),f(p))<\delta,\ \forall p\in\overline{V}$，这里的 d 是 N 上的距离．

证明 我们记 $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$．考察紧致集 $K=H\cap\overline{V}$．根据引理 3.1，存在 $\gamma>0$，使得只要 $|\tilde{g}-\tilde{f}|^{(1)}_{\varphi(K)}<\gamma$，就有

$$\tilde{g}\pitchfork_{\varphi(K)}(\mathbb{R}^s\times 0).$$

选取 $\eta\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall p\in V\setminus\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall p\in M\setminus V.\end{cases}$$

在开集 $\varphi(U)=B_3$ 上，对映射 $\tilde{f}$ 用引理 3.2 的结论，可知存在可任意小的 $c\in\mathbb{R}^{n-s}$，使得映射

$$\tilde{g}_c(x)=\tilde{f}(x)-\eta(\varphi^{-1}(x))(0,c)$$

在 $\varphi(\overline{W})=\overline{B}_1$ 上与 $\mathbb{R}^s\times 0$ 横截．我们定义

$$g(p)=\begin{cases}\psi^{-1}\circ g_c\circ\varphi(p), & \forall p\in U,\\ f(p), & \forall p\in M\setminus\overline{V}.\end{cases}$$

只要 $c\in\mathbb{R}^{n-s}$ 选择得足够小，可使 $|\tilde{g}-\tilde{f}|^{(1)}_{\varphi(K)}<\gamma$，并可使得

$$d(g(p),f(p))<\delta,\quad \forall p\in\overline{V}.$$

显然这样的 g 满足全部要求． □

3.4 定理 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，S 是 N 的 C^∞ 闭子流形，$f\in C^\infty(M,N)$，$\varepsilon\in C^0(M,\mathbb{R})$ 并且 $\varepsilon(p)>0$, $\forall p\in M$．则存在 $g\in C^\infty(M,N)$，满足条件

(1) $g\pitchfork S$;

(2) $d(g(p),f(p))<\varepsilon(p)$, $\forall p\in M$;

(3) $g\sim f$.

证明 首先，将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 之中．设 Ω 是 N 在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的管状邻域，而 $\rho:\Omega\to N$ 是相应的 C^∞ 收缩映射．

因为 S 是 N 的闭的正则子流形，所以可选择 N 的一个图汇 $\{(Q,\psi)\}$，使得只要是 $Q\cap S\neq\varnothing$，相应的图卡 (Q,ψ) 就是关于子流形 S 为正则的．开集族 $\mathscr{Q}=\{f^{-1}(Q)\}$ 覆盖了 M．因而存在 M 的可数个图卡 (U_i,φ_i) 和开集 $V_i, W_i\subset U_i$, $i=1,2,\cdots$，使得

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族，且 $\mathscr{U}<\mathscr{Q}$;

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3$, $\varphi_i(V_i)=B_2$, $\varphi_i(W_i)=B_1$, $i=1,2,\cdots$;

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M.

因为 $\overline{V}_i$ 是 M 中的紧致集，所以

$$\varepsilon_i=\min_{p\in\overline{V}_i}\{\varepsilon(p)\}>0,\quad i=1,2,\cdots.$$

又因为 $f(\overline{V}_i)$ 是 N 中的紧致集，所以存在 $\delta_i\in(0,\varepsilon_i)$，使得

$$q\in\mathbb{R}^{2n+1},\ d(q,f(\overline{V}_i))<\delta_i\Longrightarrow q\in\Omega.$$

约定记

$$\gamma_i=\min\{\delta_j\,|\,\overline{V}_j\cap\overline{V}_i\neq\varnothing\},\quad i=1,2,\cdots.$$

我们取 $f_0=f$, $H_0=\varnothing$．然后归纳构造一列映射 $\{f_i\}\subset C^\infty(M,N)$,

满足以下条件($i=1, 2, \cdots$):

(I_i) $f_i(p)=f_{i-1}(p)$, $\forall p\in M\setminus V_i$;

(II_i) f_i 在 H_i 上与 S 横截,这里

$$H_i=H_{i-1}\cup\overline{W}_i=\bigcup_{j=1}^{i}\overline{W}_j;$$

(III_i) $d(f_i(p), f_{i-1}(p))<\gamma_i/2^i$, $\forall p\in\overline{V}_i$.

在完成了这列映射的构造之后,我们定义

$$g(p)=\lim_{j\to\infty}f_j(p).$$

下面验证这样的 g 满足定理的全部要求.

(1) 紧致集 $\overline{W}_i$ 只与有限个 V_j 相交. 不妨设

$$V_j\cap\overline{W}_i=\varnothing,\quad \forall j\geqslant k.$$

显然 $k>i$. 于是,限制在 W_i 上有 $g|W_i=f_k$. 因而 g 在 W_i 上是 C^∞ 的. 又因为 f_k 在 $H_k\supset W_i$ 上是与 S 横截的,所以

$$g\pitchfork_{W_i}S.$$

这样的 W_i 覆盖了整个 M,所以有

$$g\in C^\infty(M, N),\quad g\pitchfork S.$$

(2) 对于任意的 $p\in M$,不妨设 $p\in W_i$. 于是有

$$d(g(p), f(p))<\sum{}'\frac{\gamma_j}{2^j}<\delta_i<\varepsilon(p),$$

这里的 $\sum{}'$ 表示对那些使得 $\overline{V}_j\cap\overline{V}_i\neq\varnothing$ 的 j 求和.

(3) 对于 $p\in M$,将 $g(p)$ 和 $f(p)$ 视为 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的点. 因为

$$\|(1-t)g(p)+tf(p)-f(p)\|<\delta_i,\ \forall p\in W_i,\quad i=1, 2, \cdots,$$

所以

$$(1-t)g(p)+tf(p)\in\Omega.$$

因而可定义

$$F(t, p)=\rho((1-t)g(p)+tf(p)).$$

这样定义的 $F: I\times M\to N$ 使得 $g\sim f$. □

对定理 3.4 的证明稍作修改,就可以证明以下的横截扩张定理.

3.5 定理 设 M 和 N 是 C^∞ 流形, S 是 N 的 C^∞ 闭子流形, $f\in C^\infty(M, N)$, $\varepsilon\in C^0(M, \mathbb{R})$ 并且 $\varepsilon(p)>0$, $\forall p\in M$. 如果 K 是 M 中

的紧致集，使得

$$f \pitchfork_K S,$$

那么存在 $g \in C^\infty(M, N)$，满足以下条件：

(0) $g|K = f|K$;

(1) $g \pitchfork S$;

(2) $d(g(p), f(p)) < \varepsilon(p),\ \forall p \in M$;

(3) $g \sim f$.

证明 首先将 N 嵌入到 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中．设 Ω 是 N 在 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 中的管状邻域（ρ 是相应的收缩映射）．

因为 S 是 N 的闭的正则子流形，所以可选择 N 的一个图汇 $\{(Q, \psi)\}$，使得只要 $Q \cap S \neq \varnothing$，相应的图卡 (Q, ψ) 就是关于子流形 S 为正则的．我们记

$$\mathscr{Q} = \{f^{-1}(Q) \cap (M \setminus K)\}.$$

对于流形 $M \setminus K$ 及其开覆盖 $\mathscr{Q}$，选择可数个局部坐标图卡 (U_i, φ_i) 和相应的开集 $V_i, W_i\ (i=1, 2, \cdots)$，满足类似于定理 3.4 的证明中所述的条件（但以 $M \setminus K$ 代替 M）．并可仿照定理 3.4 证明中的办法确定相应的正数 $\varepsilon_i, \delta_i, \gamma_i\ (i=1, 2, \cdots)$.

因为 $f \pitchfork_K S$，所以存在包含 K 的开集 G，使得

$$f \pitchfork_G S.$$

又存在闭包为紧致集的开集 W_0，使得

$$K \subset W_0 \subset \overline{W}_0 \subset G.$$

从 $f_0 = f$ 和 $H_0 = \overline{W}_0$ 开始，我们可以仿照定理 3.4 证明中的作法，归纳地构造 $\{f_i\} \subset C^\infty(M, N)$，满足以下的条件 $(i=1, 2, \cdots)$：

(I_i) $f_i(p) = f_{i-1}(p),\ \forall p \in M \setminus V_i$;

(II_i) f_i 在 H_i 上与 S 横截，这里

$$H_i = H_{i-1} \cup \overline{W}_i = \bigcup_{j=0}^{i} \overline{W}_j;$$

(III_i) $d(f_i(p), f_{i-1}(p)) < \gamma_i / 2^i,\ \forall p \in \overline{V}_i$.

然后可定义

$$g(p)=\lim_{k\to\infty} f_k(p).$$

容易验证,这样定义的 g 满足全部要求． □

§4　关于映射的 C^r 拓扑与 C^r 意义下的逼近

上一节中的横截逼近定理(定理 3.4)只讨论了 C^0 意义下的逼近．若要讨论 C^r 意义下的逼近,就要设法赋予 $C^s(M, N)(s\geqslant r)$ 以适当的 C^r 拓扑．限于篇幅,这里只能作一个概略的介绍．

首先约定一些记号．设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集,H 是 $\mathbb{R}^m$ 中的紧致集,$H\subset U$. 对于 C^r 映射 $F: U\to\mathbb{R}^n$,我们引入记号:

$$|F|_H^{(0)}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sup_{x\in H}\{|F_j(x)|\},$$

$$|F|_H^{(r)}=\max\left\{|F|_H^{(0)}, \left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_H^{(r-1)}, \cdots, \left|\frac{\partial F}{\partial x_m}\right|_H^{(r-1)}\right\}.$$

设 M 和 N 是 C^s 流形, $f\in C^s(M,N)$, $r\leqslant s$. 并设:

(Ⅰ) $\mathscr{A}=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一个局部有限的图汇;

(Ⅱ) $\mathscr{B}=\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ 是 N 的一个图汇;

(Ⅲ) $\mathscr{K}=\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的一个紧致集族,满足条件:

(a) $K_\alpha\subset U_\alpha$, $\forall\alpha\in A$,

(b) 对每个 $\alpha\in A$, 存在确定的 $\beta(\alpha)$, 使得 $f(K_\alpha)\subset V_{\beta(\alpha)}$,

(c) $\bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha\supset M$;

(Ⅳ) $\mathscr{E}=\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族正实数．

对于如上所述的任意一族 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$, 用记号 $\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$ 表示满足下列条件的 g 的集合:

(1) $g\in C^s(M, N)$;

(2) $g(K_\alpha)\subset V_{\beta(\alpha)}$, $\forall\alpha\in A$;

(3) $|\widetilde{g}_\alpha-\widetilde{f}_\alpha|_{\varphi_\alpha(K_\alpha)}^{(r)}<\varepsilon_\alpha$, $\forall\alpha\in A$,

这里 $\tilde{f}_\alpha=\psi_{\beta(\alpha)}\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}$, $\tilde{g}_\alpha=\psi_{\beta(\alpha)}\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1}$.

对于固定的 $r\leqslant s$, 以所有这样的

$$\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$$

为 f 的基本邻域系, 可以建立 $C^s(M,N)$ 的拓扑. 这就是 $C^s(M,N)$ 的 Whitney C^r 拓扑(又称 C^r 强拓扑).

现在设 M 和 N 是 C^∞ 流形, $f\in C^\infty(M,N)$. 对于 $r=0,1,2,\cdots$ 和所有允许的 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E}$, 以所有的

$$\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$$

为 f 的基本邻域系, 这样建立的 $C^\infty(M,N)$ 的拓扑, 被称为 Whitney C^∞ 拓扑(又称 C^∞ 强拓扑).

建立了 C^r 拓扑之后, 就可着眼于更一般的横截逼近定理. 首先, 对引理 3.3 的证明作很小的修改, 就可证明以下的引理.

4.1 引理 设 M 和 N 是 C^∞ 流形, H 是 M 中的紧致集, S 是 N 的 C^∞ 闭子流形, $f\in C^\infty(M,N)$. 又设:

(i) $f\pitchfork_H S$;

(ii) $p_0\in f^{-1}(S)$, (Q,ψ) 是 N 在 $q_0=f(p_0)$ 邻近的关于子流形 S 为正则的局部坐标图卡, (U,φ) 是 M 在 p_0 点邻近的局部坐标图卡, 满足条件

$$\varphi(p_0)=0,\quad \varphi(U)=B_3,\quad f(U)\subset Q.$$

(我们记 $V=\varphi^{-1}(B_2)$, $W=\varphi^{-1}(B_1)$.)

在上述条件下, 对任何 $\delta>0$, 存在 $g\in C^\infty(M,N)$, 使得

(1) $g(p)=f(p)$, $\forall p\in M\setminus V$;

(2) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上与 S 横截,

(3) $|\tilde{g}-\tilde{f}|^{(r)}_{\varphi(V)}<\delta$,

这里 $\tilde{g}=\psi\circ g\circ\varphi^{-1}$, $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$.

下面是 C^∞ 意义下的横截逼近定理.

4.2 定理 设 M 和 N 是 C^∞ 流形, S 是 N 的 C^∞ 闭子流形. 则与 S 横截的 $g\in C^\infty(M,N)$ 在 $C^\infty(M,N)$ 中稠密.

证明 对任意的 $f\in C^\infty(M,N)$ 和 C^∞ 拓扑中 f 的任意一个邻

域 $\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$, 需要证明存在 $g\in\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$, 使得

$$g \pitchfork S.$$

只须对定理 3.4 的证明作少许修改(以引理 4.1 代替引理 3.3), 就可完成这里的证明. □

下面的定理说明: 横截性不会因小的扰动而遭到破坏.

4.3 定理 设 M 和 N 是 C^∞ 流形, S 是 N 的 C^∞ 闭子流形. 则集合

$$\mathscr{T}_S=\{g\in C^\infty(M,N)\,|\,g\pitchfork S\}$$

是 C^1 拓扑中的开集(因而也是 C^∞ 拓扑中的开集).

证明 因为 S 是 N 的闭正则子流形, 所以可以选择 N 的图汇 $\{(Q_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$, 使得只要 $Q_\beta\cap S\neq\varnothing$, 相应的图卡 (Q_β,ψ_β) 就是关于子流形 S 为正则的. 对于任意一个 $f\in C^\infty(M,N)$, 开集族 $\mathscr{O}=\{f^{-1}(Q_\beta)\}_{\beta\in B}$ 覆盖了 M. 因而存在 M 的可数个局部坐标图卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和开集 V_α, $W_\alpha\subset U_\alpha$, $\alpha=1,2,\cdots$, 使得

(1) $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是局部有限族且 $\mathscr{U}<\mathscr{O}$,

(2) $\varphi_\alpha(U_\alpha)=B_3$, $\varphi_\alpha(V_\alpha)=B_2$, $\varphi_\alpha(W_\alpha)=B_1$,

(3) $\mathscr{W}=\{W_\alpha\}$ 覆盖了 M.

记 $K_\alpha=\overline{W}_\alpha$. 在开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)=B_3$ 上, 对映射 $\tilde{f}_\alpha=\psi_{\beta(\alpha)}\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 用引理 3.1 的结论可知: 存在 $\varepsilon_\alpha>0$, 使得只要 $|\tilde{g}_\alpha-\tilde{f}_\alpha|^{(1)}_{\varphi_\alpha(K_\alpha)}<\varepsilon_\alpha$, 就必定有

$$g \pitchfork_{K_\alpha} S.$$

如果记

$$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\},\quad \mathscr{B}=\{(Q_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B},\quad \mathscr{K}=\{K_\alpha\},\quad \mathscr{E}=\{\varepsilon_\alpha\},$$

那么显然 f 的邻域 $\mathscr{U}^{(1)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$ 包含在集合 $\mathscr{T}_S$ 之中. □

4.4 注记 如果 S 不是闭的, 那么定理 4.3 的结论可以不成立. 请看下面的反例:

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+(y-1)^2=1\},\quad N=\mathbb{R}^2,$$
$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<x<2,\ y=0\},$$

$$f(x,y)=(x,y),\quad \forall (x,y)\in M,$$
$$g(x,y)=(x+a,y),\quad \forall (x,y)\in M.$$
显然 $f,g\in C^\infty(M,N)$．取 $a>0$ 充分小可使 g 在 C^∞意义下任意接近 f．但是
$$f\in\mathscr{T}_S,\quad g\notin\mathscr{T}_S.$$
（参看图 15.）

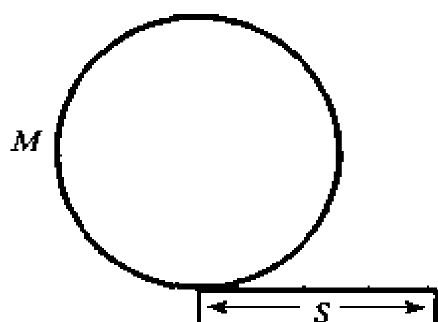


图　15

§5　涉及带边流形的定理

我们约定记
$$\mathbb{R}_+^m=\{(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m | x^1\geqslant 0\}.$$
设 M 是 m 维带边流形，$p\in M$．如果存在 M 的局部坐标图卡 (U,φ) $(\varphi(U)\subset\mathbb{R}_+^m)$，使得 $p\in U$，$\varphi(p)\in 0\times\mathbb{R}^{m-1}$，那么我们就说 p 是 M 的边缘点．M 的全体边缘点的集合记为 ∂M.

设 M 是一个带边流形，N 是一个无边流形．我们将映射 f：$M\to N$ 在 ∂M 上的限制记为
$$\partial f=f|\partial M:\partial M\to N.$$
带边流形 M 的边缘 ∂M 是一个(低一维的)无边流形．如果 f 是 C^r 映射，那么 ∂f 也是 C^r 映射．对于 f 和 ∂f 的临界点，有这样的关系(练习 E.2)：
$$C(\partial f)\supset C(f)\cap\partial M.$$

5.1 定理(带边流形的 Sard 定理) 设 M 是带边 C^∞ 流形，N 是无边 C^∞ 流形，$f: M \to N$ 是 C^∞ 映射．则 f 与 ∂f 的临界值集合的并集是零测集．因而几乎所有的 $q \in N$ 都是 f 与 ∂f 共同的正则值．

证明 因为

$$C(f)=(C(f)\cap(M\setminus\partial M))\cup(C(f)\cap\partial M), \quad C(f)\cap\partial M\subset C(\partial f),$$

所以

$$C(f)\cup C(\partial f)=(C(f)\cap(M\setminus\partial M))\cup C(\partial f).$$

由此得到

$$\begin{aligned} f(C(f))\cup\partial f(C(\partial f)) &= f(C(f)\cup C(\partial f)) \\ &= f((C(f)\cap(M\setminus\partial M))\cup C(\partial f)) \\ &= f(C(f)\cap(M\setminus\partial M))\cup\partial f(C(\partial f)). \end{aligned}$$

因为 $M\setminus\partial M$ 和 ∂M 都是无边流形．只须引用无边情形的 Sard 定理(即定理 1.5)，就可以完成本定理的证明． □

为了讨论涉及带边流形的“正则值原像定理”和“横截原像定理”，我们需要考察带边情形的淹没的局部表示．

5.2 引理(淹没的典范局部表示) 设 $r\geqslant 1$，M 是 C^r 带边的流形，N 是 C^r 无边的流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，$p\in\partial M$．若 $\partial f: \partial M\to N$ 在 p 点是淹没，则有 M 在 p 点邻近的图卡 (U,φ) 和 N 在 $q=f(p)$ 点邻近的图卡 (V,ψ)，使得

(1) $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m_+$，$\varphi(U\cap\partial M)\subset 0\times\mathbb{R}^{m-1}$，
$\varphi(p)=0\in\mathbb{R}^m_+$，$\psi(q)=0\in\mathbb{R}^n$，$f(U)\subset V$；

(2) f 的局部表示 $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 成为向最后 n 个坐标的投影，即

$$\tilde{f}(u^1,\cdots,u^m)=(u^{m-n+1},\cdots,u^m).$$

证明 首先选取 M 在 p 点邻近之图卡 (U_0,φ_0) 和 N 在 $q=f(p)$ 点邻近之图卡 (V,ψ)，满足条件：

$$\varphi_0(U_0)\subset\mathbb{R}^m_+,\quad \varphi_0(U_0\cap\partial M)\subset 0\times\mathbb{R}^{m-1},$$
$$\varphi_0(p)=0\in\mathbb{R}^m_+,\quad \psi(q)=0\in\mathbb{R}^n,\quad f(U_0)\subset V.$$

因为 ∂f 在 p 点为淹没，所以映射

$$(x^2, \cdots, x^m) \longmapsto \widetilde{f}_0(0, x^2, \cdots, x^m)$$

在点 $(x^2, \cdots, x^m) = (0, \cdots, 0)$ 为淹没．不妨设

$$\frac{\partial(\widetilde{f}_0^1, \cdots, \widetilde{f}_0^n)}{\partial(x^{m-n+1}, \cdots, x^m)} \neq 0.$$

我们作坐标变换

$$\begin{cases} u^1 = x^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^t = \qquad\qquad x^t, \\ u^{t+1} = \widetilde{f}_0^1(x^1, \cdots, x^t, x^{t+1}, \cdots, x^m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^m = \widetilde{f}_0^n(x^1, \cdots, x^t, x^{t+1}, \cdots, x^m), \end{cases}$$

其中 $t = m - n$．显然有

$$\left.\frac{\partial(u^1, \cdots, u^m)}{\partial(x^1, \cdots, x^m)}\right|_{x=0} \neq 0.$$

以 $u^1, \cdots, u^m$ 作为新的局部坐标，得到 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U, φ)，其中 $U \subset U_0$．容易看出，这时引理的全部要求都得到满足． □

5.3 定理（带边情形的正则值原像定理） 设 $r \geqslant 1$，M 是 C^r 带边流形，N 是 C^r 无边流形，$f: M \to N$ 是 C^r 映射．如果 $q \in N$ 是 f 和 $\partial f = f|\partial M$ 二者共同的正则值并且 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$，那么 $S = f^{-1}(q)$ 是 M 的 $m-n$ 维正则子流形（可带边），并且

$$\partial S = S \cap \partial M.$$

证明 如若 $p_0 \in S \cap (M \setminus \partial M)$，则 p_0 点邻近的状况与无边流形完全一样．因此不妨设 $p_0 \in S \cap \partial M$．我们选择 p_0 点邻近的局部坐标如引理 5.2 所述．因为

$$p \in U \cap f^{-1}(q) \Longleftrightarrow \varphi(p) \in \widetilde{f}^{-1}(0),$$

所以

$$\varphi(U\cap S)=\tilde{f}^{-1}(0)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}_+^{m-n}\times 0^n).$$

这证明了 S 是 M 的 $m-n$ 维正则子流形．又因为

$$p\in U\cap f^{-1}(q)\cap\partial M\iff\varphi(p)\in\tilde{f}^{-1}(0)\cap(0\times\mathbb{R}^{m-1}),$$

所以有

$$\begin{aligned}\varphi(U\cap S\cap\partial M)&=\tilde{f}^{-1}(0)\cap(0\times\mathbb{R}^{m-1})\\&=\varphi(U)\cap(0\times\mathbb{R}^{m-n-1}\times 0^n)=\varphi(U\cap\partial S).\end{aligned}$$

由此得知

$$S\cap\partial M=\partial S.\qquad\square$$

5.4 定理(带边情形的横截原像定理) 设 $r\geqslant 1$, M 是 C^r 带边流形，N 是 C^r 无边流形，S 是 N 的 C^r 正则子流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射．如果

$$f\pitchfork S,\quad \partial f\pitchfork S,\quad f^{-1}(S)\neq\varnothing,$$

那么 $f^{-1}(S)$ 就是 M 的 C^r 正则子流形，其边缘为

$$\partial f^{-1}(S)=f^{-1}(S)\cap\partial M,$$

并且

$$\operatorname{codim} f^{-1}(S)=\operatorname{codim} S.$$

证明 设 $\dim M=m, \dim N=n, \dim S=s$. 对于任意的 $p_0\in f^{-1}(S)$, 首先选取 N 在点 $q_0=f(p_0)(\in S)$ 邻近的关于 S 为正则的局部坐标图卡 (V,ψ)，并选取点 p_0 的开邻域 U_0, 满足条件 $f(U_0)\subset V$. 我们定义这样一个映射

$$g=\pi''\circ\psi\circ f|U_0: U_0\to\mathbb{R}^{n-s}.$$

容易看出

$$U_0\cap f^{-1}(S)=U_0\cap g^{-1}(0).$$

因为 C^∞映射 $g: U_0\to\mathbb{R}^{n-s}$ 以 0 为正则值，所以根据定理 5.3 可知，存在 M 在 p_0 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ)，$U\subset U_0$, 使得

$$\varphi(U\cap f^{-1}(S))=\varphi(U\cap g^{-1}(0))=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}_+^{m-n+s}\times 0^{n-s}),$$

$$\varphi(U\cap f^{-1}(S)\cap\partial M)=\varphi(U\cap g^{-1}(0)\cap\partial M)$$

$$=\varphi(U)\cap(0\times\mathbb{R}^{m-n+s-1}\times 0^{n-s}).\qquad\square$$

对于带边流形，也有与§3中定理3.4和定理3.5相应的结果．这些结果当然可以通过修改§3中的做法予以证明．但我们宁愿探讨另一种不同风格的证明(同时也给出§3中的定理的新的证明)．

先证明一个有用的引理．

5.5 引理 设$\beta: X\to Y$和$\gamma: Y\to Z$是光滑流形之间的光滑映射，S是Z的光滑的正则子流形，$\gamma\pitchfork S$，则

$$\gamma\circ\beta\pitchfork S\Longleftrightarrow\beta\pitchfork\gamma^{-1}(S).$$

证明 设$\dim X=k$，$\dim Y=m$，$\dim Z=n$，$\dim S=s$，并记

$$W=\gamma^{-1}(S).$$

只须对任意的$x\in\beta^{-1}(\gamma^{-1}(S))$验证

$$\gamma\circ\beta\pitchfork_x S\Longleftrightarrow\beta\pitchfork_x W.\tag{5.1}$$

这是一个局部性的论断，可以选择适当的局部坐标图卡，通过映射β和γ的局部坐标表示加以验证．为了避免引人太多的符号，不妨设X, Y和Z就是局部坐标域，$\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$和$\widetilde{Z}$分别是它们在坐标映射下的像集，$\widetilde{S}$和$\widetilde{W}$分别是S和W在局部坐标域内的那一部分的像集，$\widetilde{\beta}$和$\widetilde{\gamma}$分别是β和γ的局部表示．在这样的约定下，局部状况就如图16中图表所示．

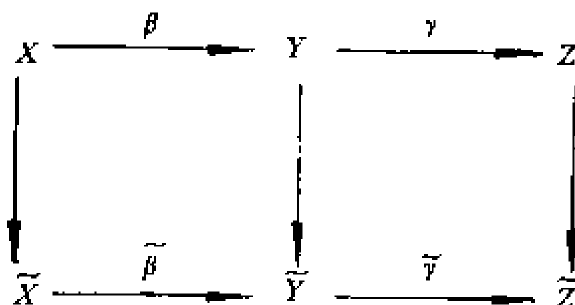


图16 表现局部状况的交换图表

下面说明局部坐标应该怎样选取以方便于验证(5.1)．首先，所选取的Z的局部坐标应该是关于S为正则的，因而可设

$$\widetilde{Z}=H\times V,\quad \widetilde{S}=H\times 0,$$

其中 $$V=\{v\in\mathbb{R}^{n-s}\mid\|v\|<\varepsilon\}.$$
其次，所选取的 Y 的局部坐标应该使得 $\pi''\circ\tilde{\gamma}$ 具有淹没的局部典范形式，即 $\pi''\circ\tilde{\gamma}(u,v)=v$．于是可设
$$\tilde{Y}=U\times V,\quad \tilde{W}=U\times 0,$$
并且可设 γ 的局部表示是
$$\tilde{\gamma}(u,v)=(\eta(u,v),v). \tag{5.2}$$
顺便指出，(5.2)是一般情形下具有横截性质的映射的典范局部形式．从(5.2)式可以看出
$$\pi''\circ\tilde{\beta}=\pi''\circ\tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta}. \tag{5.3}$$
(上式左边的 π'' 是从 $U\times V$ 到 V 的投射，右边的 π'' 是从 $H\times V$ 到 V 的投射．)

于是，在如上所述的局部范围内应有
$$\gamma\circ\beta\pitchfork S\Longleftrightarrow\tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta}\pitchfork\tilde{S}\Longleftrightarrow\pi''\circ\tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta}\pitchfork 0$$
$$\Longleftrightarrow\pi''\circ\tilde{\beta}\pitchfork 0\Longleftrightarrow\tilde{\beta}\pitchfork\tilde{W}\Longleftrightarrow\beta\pitchfork W.$$
这证明了(5.1)，从而完成了引理的证明． □

5.6 定理(含参数的横截性定理，无边情形) 设 Λ, M 和 N 是 C^∞ 流形，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，并设 $F:\Lambda\times M\to N$ 是 C^∞ 映射．如果
$$F\pitchfork S,$$
那么对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$(即对 Λ 中不属于某个零测集的所有的 λ)，由式
$$F_\lambda(\cdot)=F(\lambda,\ \cdot)$$
定义的映射 $F_\lambda:M\to N$ 都与 S 横截，即
$$F_\lambda\pitchfork S.$$

证明 若定义这样一个 C^∞ 映射
$$I_\lambda:\ M\to\Lambda\times M$$
$$p\mapsto(\lambda,p),$$
则有 $F_\lambda=F\circ I_\lambda$．于是，根据引理 5.5 有
$$F_\lambda\pitchfork S\Longleftrightarrow I_\lambda\pitchfork F^{-1}(S).$$

我们用符号 π 表示从 $\Lambda\times M$ 到 Λ 的投射，并记

$$V_\lambda=I_\lambda(M)=\{\lambda\}\times M,\quad W=F^{-1}(S).$$

容易看到

$$F_\lambda \pitchfork S \Longleftrightarrow I_\lambda \pitchfork F^{-1}(S) \Longleftrightarrow V_\lambda \pitchfork W \Longleftrightarrow (\pi|W) \pitchfork \lambda$$

（参看图 17）.

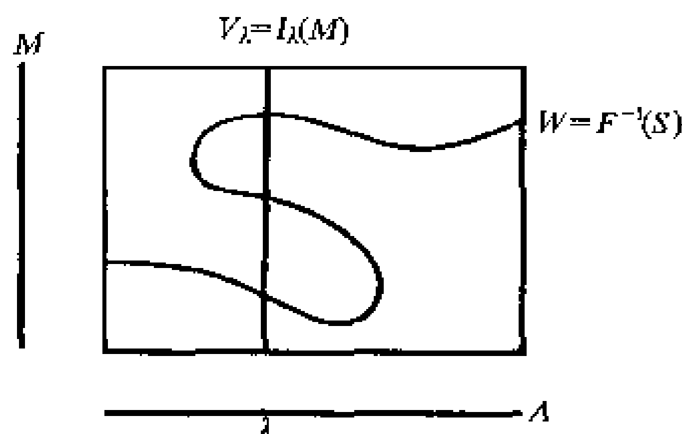


图 17

根据 Sard 定理，几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$ 都是 C^∞ 映射 $(\pi|W)$：$W\to\Lambda$ 的正则值. 因而几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$ 都使得

$$F_\lambda \pitchfork S.\qquad\square$$

5.7 定理（含参数的横截性定理，带边情形） 设 Λ, M 和 N 是 C^∞ 流形，其中只有 M 是带边的. 又设 S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，F：$\Lambda\times M\to N$ 是 C^∞ 映射. 如果

$$F\pitchfork S,\quad \partial F\pitchfork S,$$

那么对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$，由式 $F_\lambda(p)=F(\lambda,p)$ 所定义的映射 F_λ：$M\to N$ 都使得

$$F_\lambda\pitchfork S,\quad \partial F_\lambda\pitchfork S.$$

证明 我们注意到这样的事实：

$$\partial(\Lambda\times M)=\Lambda\times\partial M.$$

因为 $M\backslash\partial M$ 和 ∂M 都是无边流形，所以可对 $F|(\Lambda\times(M\backslash\partial M))$ 和 $\partial F=F|(\Lambda\times\partial M)$ 引用定理 5.6 的结论，从而完成本定理的证明. $\square$

下面讨论关于带边流形的"横截逼近定理"和"横截扩张定理"．为了避开某些细微末节尽快接触问题的实质，不妨假设 M 是紧致的带边流形(本讲义以后各章只涉及到这情形)．这里所作的证明经过少许修改即可适用于更一般的情形(见后面的注记5.10)．

5.8 定理(横截逼近定理，带边情形) 设 M 是紧致 C^∞ 带边流形，N 是 C^∞ 无边流形，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，$f\in C^\infty(M,N)$．则存在任意接近 f 的 $g\in C^\infty(M,N)$，满足条件

(1) $g \pitchfork S$, $\partial g \pitchfork S$,

(2) $g\sim f$.

证明 我们可以将 N 看成 $\mathbb{R}^k$ 的正则子流形($k=2\dim N+1$)．设 Ω 是 N 在 $\mathbb{R}^k$ 中的管状领域，$\rho:\Omega\to N$ 是相应的收缩映射．对于紧致集 $f(M)\subset N$，可以确定一个正实数 ε，使得

$$d(q,f(M))<\varepsilon \Rightarrow q\in\Omega.$$

设 Λ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的开单位球，即 $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}^k \mid \|\lambda\|<1\}$．我们定义这样一个 C^∞ 映射

$$G:\Lambda\times M\to N$$
$$(\lambda,p)\mapsto \rho(f(p)+\varepsilon\lambda).$$

容易验证 G 是一个淹没映射，因而

$$G\pitchfork S.$$

根据定理 5.7，对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$，由式 $G_\lambda(p)=G(\lambda,p)$ 定义的映射 $G_\lambda:M\to N$ 都使得

$$G_\lambda \pitchfork S,\quad \partial G_\lambda \pitchfork S. \tag{5.4}$$

我们可以选取足够小的 $\lambda\in\Lambda$，使得(5.4)成立，并且使得 $g=G_\lambda:M\to N$ 充分接近于 f．对这取定的 λ，显然

$$H(t,p)=\rho(f(p)+(1-t)\varepsilon\lambda)$$

定义了一个从 g 到 f 的同伦． □

5.9 定理(横截扩张定理，带边情形) 设 M 是紧致的 C^∞ 带边流形，K 是 M 的紧致子集，N 是 C^∞ 无边流形，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，$f\in C^\infty(M,N)$．若 f 在 K 上与 S 横截，∂f 在 $K\cap\partial M$ 上

与 S 横截，则存在可任意接近 f 的 $g\in C^\infty(M, N)$，使得

(0) $g|K=f|K$,

(1) $g \pitchfork S$, $\partial g \pitchfork S$,

(2) $g\sim f$.

证明 取 M 的开集 $U\supset K$，使得 f 在 U 上与 S 横截，∂f 在 $U\cap\partial M$ 上与 S 横截．取闭包为紧致集的开集 V，使得

$$U\supset\overline{V}\supset V\supset K.$$

然后取 $\eta\in C^\infty(M, \mathbb{R})$，适合条件：

$$\begin{cases}0\leqslant\eta(p)\leqslant 1, & \forall p\in M,\\ \eta(P)=0, & \forall p\in K,\\ \eta(p)=1, & \forall p\in M\setminus V.\end{cases}$$

我们定义这样一个 C^∞ 映射

$$G: \Lambda\times M\to N,$$

$$(\lambda, p)\mapsto\rho(f(p)+\varepsilon\eta(p)\lambda),$$

其中记号 Λ 和 ρ 的含义均如定理 5.8 的证明中所述．

往下，我们可以亦步亦趋地仿照定理 5.8 证明中的做法，完成本定理的证明． □

5.10 注记 定理 5.8 和定理 5.9 的陈述中要求 M 是紧致的．但只要对证明的技术细节作一点修改，就可取消要求 M 紧致的限制．修改中主要用到这样的事实(请读者自己予以证明)：

设 N 是 $\mathbb{R}^k$ 的 C^∞ 正则子流形，Ω 是 N 在 $\mathbb{R}^k$ 中的管状邻域(ρ 是相应的 C^∞ 收缩映射)，则存在正值 C^∞ 映射 $\varepsilon: N\to\mathbb{R}$，使得对任何 $q\in N$ 都有

$$\{y\in\mathbb{R}^k\,|\,d(y, q)<\varepsilon(q)\}\subset\Omega.$$

基于上述事实，对于 M 不一定紧致的情形，仍可定义

$$G: \Lambda\times M\to N,$$

$$(\lambda, p)\mapsto\rho(f(p)+\varepsilon(f(p))\lambda).$$

于是，无须假定 M 紧致，仍可证明定理 5.8 的结论．对定理 5.9 也可作类似的修改．

附录γ Sard 定理的证明

γ.1 引理 如果闭区间 $I=[a,b]$ 被一族长度都不超过 δ 的开区间 $\{J\}$ 所覆盖，那么存在 $\{J\}$ 中有限个开区间 $J_1,\cdots,J_k$，使得

$$I\subset\bigcup_{i=1}^{k}J_i,\quad \sum_{i=1}^{k}|J_i|\leqslant 2(|I|+\delta).$$

证明 首先，不妨设 $\{J\}$ 由有限个开区间组成．其次，有公共点的三个开区间当中，必有其中两个区间覆盖了第三个区间(有最小左端点的区间和有最大右端点的区间必定覆盖第三个区间)．我们可以从 $\{J\}$ 中删除多余的开区间，使得任意一点 $x\in I$ 至多属于 $\{J\}$ 中的两个开区间，并且 I 的端点 a 和 b 各自只属于 $\{J\}$ 中的一个开区间．

删除了多余的开区间之后，剩下的有限个开区间 $J_1,\cdots,J_k$ 必定满足要求

$$I\subset\bigcup_{i=1}^{k}J_i,\quad \sum_{i=1}^{k}|J_i|\leqslant 2(|I|+\delta).\qquad \square$$

γ.2 引理 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集．如果集合

$$K_t=K\cap(\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1})$$

包含在 $\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1}$ 的开集 $\{t\}\times W_t$ 之中，那么存在实数 $\alpha>0$，使得

$$K\cap((t-\alpha,t+\alpha)\times\mathbb{R}^{n-1})\subset(t-\alpha,t+\alpha)\times W_t.$$

(参看图 18.)

证明 连续函数

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=|x_1-t|$$

在紧致集 $K\backslash(\mathbb{R}\times W_t)$ 上恒取正值，因而有正的下界 α，对这 α 有

$$K\cap((t-\alpha,t+\alpha)\times\mathbb{R}^{n-1})\subset(t-\alpha,t+\alpha)\times W_t.\qquad \square$$

γ.3 定理(Fubini 定理的特殊情形) 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 是至多可数个紧致集的并集．如果对任意的 $t\in\mathbb{R}$，截集

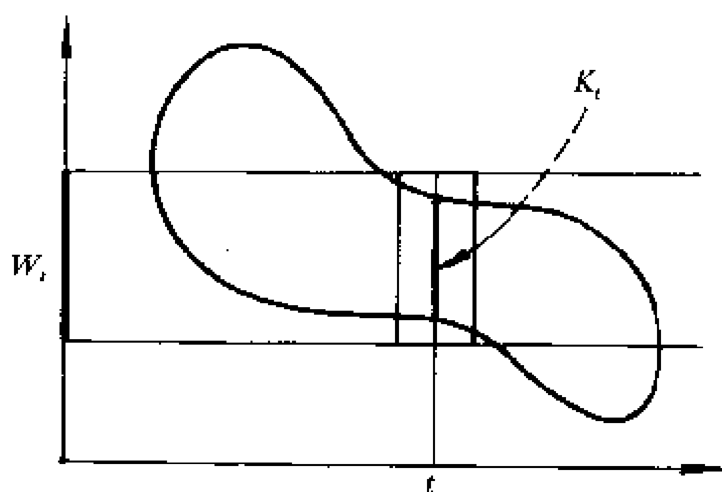


图 18

$$S_t = S \cap (t \times \mathbb{R}^{n-1})$$

都是 $t \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集，那么 S 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．

证明 只须对 $S=K$ 是紧致集的情形作出证明．设 $\mathbb{R}$ 的闭区间 I 使得

$$K \subset I \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

对任意的 $t \in I$，截集 $K_t = K \cap (t \times \mathbb{R}^{n-1})$ 是 $t \times \mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集．因而对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的有限个开方体之并集 W_t，使得

$$K_t \subset t \times W_t, \quad |W_t| < \varepsilon.$$

根据引理 Υ.2，存在开区间 $J_t = (t-\alpha_t, t+\alpha_t)$ $(\alpha_t \in (0,1))$，使得

$$K \cap (J_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset J_t \times W_t.$$

根据引理 Υ.1，从 $\{J_t\}_{t \in I}$ 之中可选择有限个 J_{t_i}，使得

$$I \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_{t_i}, \quad \sum_{i=1}^{k} |J_{t_i}| \leqslant 2(|I|+2).$$

于是

$$K = K \cap (I \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (K \cap (J_{t_i} \times \mathbb{R}^{n-1})) \subset \bigcup_{i=1}^{k} (J_{t_i} \times W_{t_i}),$$

$$\sum_{i=1}^{k} |J_{t_i} \times W_{t_i}| = \sum_{i=1}^{k} |J_{t_i}| \times |W_{t_i}| < \varepsilon \sum_{i=1}^{k} |J_{t_i}| \leqslant 2\varepsilon(|I|+2). \qquad \square$$

Υ.4 引理 设 V, W 和 N 是微分流形，$f: V \to N$ 是可微映射，$h: V \to W$ 是微分同胚，并设 $g = f \circ h^{-1}$，则有

(1) $x \in C(f) \Longleftrightarrow h(x) \in C(g)$,

(2) $f(C(f)) = g(C(g))$.

证明 留作练习. □

Υ.5 定理(Sard 定理) 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，$f: M \to N$ 是 C^∞ 映射，则 $f(C(f))$ 是 N 中的零测集. 因而几乎所有的 $q \in N$ 都是 f 的正则值.

证明 设 $\dim M = m$, $\dim N = n$. 对于 $m < n$ 的情形，我们知道 $f(M)$ 是 N 中的零测集，其子集 $f(C(f))$ 当然也是 N 中的零测集. 下面对 M 的维数 m 作归纳，以完成定理的证明. 因为任何(满足第二可数公理的)流形都可以表示成可数个局部坐标域的并集，所以不妨设 $M = U$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$N = \mathbb{R}^n$.

记 $C = C(f)$. 并以 C_j 表示 U 中使得 f 的不超过 j 阶的所有偏导数都取 0 值的那些点 x 的集合. 显然有

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k; \tag{Υ.1}$$

$$f(C) = f(C \backslash C_1) \cup f(C_1 \backslash C_2) \cup \cdots \cup f(C_{k-1} \backslash C_k) \cup f(C_k). \tag{Υ.2}$$

我们将证明:

(Ⅰ) $f(C \backslash C_1)$ 是零测集;

(Ⅱ) $f(C_{j-1} \backslash C_j)$ 是零测集，$j = 2, 3, \cdots$;

(Ⅲ) 存在自然数 k，使得 $f(C_k)$ 是零测集.

(Ⅰ)的证明 设 a 是 $C \backslash C_1$ 中的任意一点. 不妨设

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0.$$

考察这样一个映射

$$h: (x_1, \cdots, x_m) \longmapsto (f_1(x), x_2, \cdots, x_m).$$

因为 $Dh(a)$ 的秩为 m，所以存在 $\mathbb{R}^m$ 中 a 点的开邻域 V 和 $h(a)$ 点的开邻域 W，使得 $h|V$ 是从 V 到 $W = h(V)$ 的光滑微分同胚. 我们定义

$$g=f\circ h^{-1}: W\to \mathbb{R}^n.$$

因为 $C\setminus C_1$ 可以用可数个这样的 V 覆盖，所以只须证明

$$f((C\setminus C_1)\cap V)=g(h((C\setminus C_1)\cap V))$$

是零测集．

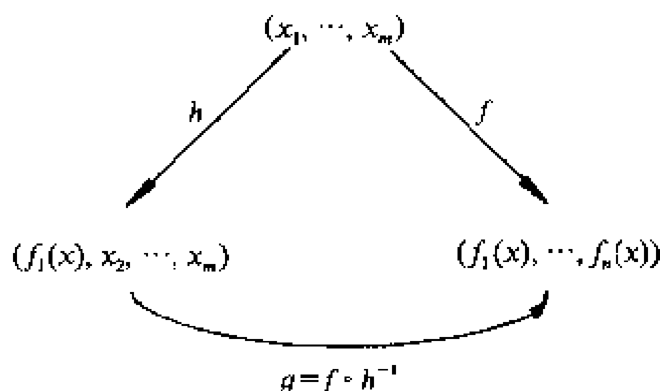


图 19

借助于交换图表(图 19)，容易看出在 W 上映射 g 具有如下形式:

$$g(z_1,\cdots,z_m)=(z_1,g_2(z),\cdots,g_n(z)).$$

这可以写成

$$g(t,\zeta)=(t,g_2(t,\zeta),\cdots,g_n(t,\zeta)),$$

其中 $\zeta=(z_2,\cdots,z_m)$. 如果用 g^t 表示这样一个从 $W\cap(t\times\mathbb{R}^{m-1})$ 到 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的映射:

$$g^t(\zeta)=(g_2(t,\zeta),\cdots,g_n(t,\zeta)),$$

那么就有

$$\mathrm{D}g(t,\zeta)=\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline * & \mathrm{D}g^t(\zeta)\end{array}\right].$$

从 g 和 $\mathrm{D}g$ 的表示式可以看出，对于 $E=h((C\setminus C_1)\cap V)\subset W$ 应有

$$(g(E))_t=g(E_t)\subset t\times g^t(C(g^t)).$$

依据归纳假设，$g^t(C(g^t))$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集，因而 $(g(E))_t$ 是 $t\times\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测集．于是，根据引理 Y.3 可以断定 $g(E)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．即 $f((C\setminus C_1)\cap V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．这证明了(Ⅰ)．

(Ⅱ)的证明　对于 $a\in C_{j-1}\setminus C_j$, 不妨设

$$\frac{\partial^j f_1}{\partial x_1 \partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j}}(a)\neq 0.$$

若记

$$\eta(x)=\frac{\partial^{j-1} f_1}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j}}(x),$$

则有

$$\frac{\partial\eta}{\partial x_1}(a)\neq 0, \tag{γ.3}$$

$$\eta(x)=0,\quad \forall x\in C_{j-1}\setminus C_j. \tag{γ.4}$$

考察映射

$$h: (x_1,\cdots,x_m)\mapsto(\eta(x),x_2,\cdots,x_m).$$

由 (γ.3) 可知，存在 $\mathbb{R}^m$ 中 a 点的开邻域 V 和 $h(a)$ 点的开邻域 W，使得 $h|V$ 是从 V 到 $W=h(V)$ 的 C^∞ 同胚．仍记 $g=f\circ h^{-1}$. 再来考察从 $W\cap(0\times\mathbb{R}^{m-1})$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射

$$g^0(\zeta)=g(0,\zeta).$$

按照归纳假设，$g^0(C(g^0))$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．由 (γ.4) 可知

$$h((C_{j-1}\setminus C_j)\cap V)\subset W\cap(0\times\mathbb{R}^{m-1}),$$

$$f((C_{j-1}\setminus C_j)\cap V)=g(h((C_{j-1}\setminus C_j)\cap V))\subset g^0(C(g^0)).$$

因而 $f((C_{j-1}\setminus C_j)\cap V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．这证明了(Ⅱ)．

(Ⅲ)的证明　将证明: $k>\dfrac{m}{n}-1$ 时，$f(C_k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集．为此，只须对任意的 m 维闭方体 $P\subset U$，证明 $f(P\cap C_k)$ 是零测集．

对于 $x_0\in P\cap C_k$ 和任意的 $x\in P$，我们有

$$\|f(x)-f(x_0)\|\leqslant b\|x-x_0\|^{k+1}, \tag{γ.5}$$

这里 b 是一个实常数．设 Q 是包含在 P 中的边长为 δ 的 m 维闭方体，满足条件 $Q\cap C_k\neq\varnothing$．则由估计式 (γ.5) 可知，Q 的像集 $f(Q)$ 包含在这样一个 n 维闭方体之中，该闭方体的边长 Δ 满足不等式

$$\Delta \leqslant B\delta^{k+1},$$

其中的 B 是与 b 有关的一个实常数．于是，对该闭方体的体积有估计式

$$\Delta^n \leqslant B^n \delta^{(k+1)n}. \tag{Y.6}$$

设 P 的边长是 λ，并设 L 是待定的充分大的自然数．我们把 P 的各条棱都等分成 L 段（每段的长度为 $\delta=\lambda/L$）．然后考察 P 被平行分割成的 L^m 个小正方体．设 Q 是这些小正方体当中与 C_k 相交的任意一个．则像集 $f(Q)$ 的体积可以用 (Y.6) 加以估计．由此得知，$f(P\cap C_k)$ 包含在不多于 L^m 个小正方体的并集之中，这些小正方体的总体积不超过

$$L^m B^n\left(\frac{\lambda}{L}\right)^{(k+1)n}=B^n\lambda^{(k+1)n}L^{m-(k+1)n}.$$

如果 $k>\dfrac{m}{n}-1$，即 $(k+1)n>m$，那么我们总可以选取足够大的 L，使得

$$B^n\lambda^{(k+1)n}L^{m-(k+1)n}<\varepsilon.$$

至此，我们证明了论断(Ⅰ)，(Ⅱ)和(Ⅲ)，从而就完成了 Sard 定理的证明． □

Y.6 注记 在上面证明的第(Ⅲ)部分中，我们利用 Taylor 展式得到估计(Y.5)．表面上看，似乎这一证明对 f 的要求可以从 C^∞ 减弱到 C^r，只要 $r=k+1>m/n$．但这种看法是不正确的．因为综观整个证明，我们采取的是归纳证法，而在归纳过程中对 r 的要求是会改变的．

练 习 E

E.1. 设 M 是连通的光滑流形．如果 $f\in C^r(M,\mathbb{R})(r\geqslant 1)$ 适合条件 $C(f)=M$，那么 f 是常值函数．

E.2. 设 M 和 N 是 C^r 流形 ($r\geqslant 1$，M 带边，N 不带边)，f：$M\to N$ 是 C^r 映射，$\partial f=f|\partial M$．试证：$C(\partial f)\supset C(f)\cap\partial M$．

E.3. 设 M 是无边 C^∞ 流形，$f: M \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 映射，b 是 f 的正则值．如果存在 $p \in M$，使得 $f(p) > b$，那么 $W = \{p \in M | f(p) \geq b\}$ 是 C^∞ 带边流形，并且 $\partial W = \{p \in M | f(p) = b\}$.

E.4. 试举出反例说明：对于 C^∞ 映射 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 和 $q \in \mathbb{R}$，集合 $f^{-1}(q)$ 可以不是 $\mathbb{R}^2$ 的子流形．

E.5. 试举出这样的例子：$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$，$q \in f(C(f))$，但 $S = f^{-1}(q)$ 却是 $\mathbb{R}^2$ 的正则子流形．

E.6. 举出这样的例子：$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 并且 $f(C(f))$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密．

E.7. 设 M 是紧致光滑流形，$\dim M > 0$. 是否存在光滑映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$，使得 $f(C(f))$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密．

E.8. 试举出这样的例子：S 是 $\mathbb{R}^3$ 的光滑正则子流形，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ 不与 S 横截，但 $f^{-1}(S)$ 却是 $\mathbb{R}^2$ 的一维正则子流形．

E.9. 设 M 是全体 $n \times n$ 实数方阵的集合，赋有等同于 n^2 维 Euclid 空间的拓扑结构与流形结构．又设 N 是全体 $n \times n$ 对称实数方阵的集合，赋有等同于 $n(n+1)/2$ 维 Euclid 空间的拓扑结构与流形结构．映射 $f: M \to N$ 定义为 $f(A) = A \cdot A^{\mathrm{T}}$，其中 A^{T} 是 A 的转置方阵．

(a) 试证 n 阶单位方阵 I 是映射 f 的正则值，因而 $f^{-1}(I)$ 是 M 的光滑的正则子流形．试计算 $f^{-1}(I)$ 的维数．

(b) 试证 $f^{-1}(I)$ 是紧致的．

(c) 容易看出：$f^{-1}(I)$ 是 n 阶正交方阵的集合 $O(n)$. 试利用上面的讨论，说明 $O(n)$ 是一个紧致李群．

E.10. (a) 设 V 和 W 是 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间．如果 $\dim V + \dim W = n$，那么

$$V \pitchfork W \Longleftrightarrow V \cap W = \{0\}.$$

(b) 设 V 是实线性空间，Δ 是 $V \times V$ 的"对角线"子空间，$A: V \to V$ 是线性映射，并设 $\Gamma = \{(\xi, A\xi) | \xi \in V\}$. 试证

$$\Gamma \pitchfork \Delta \Longleftrightarrow 1 \text{ 不是 } A \text{ 的本征值}.$$

E.11. 设 M 是 C^∞ 流形，$f \in C^\infty(M, M)$．如果 $a \in M$ 使得

(i) $f(a)=a$,

(ii) 1 不是 $A=(\mathrm{d}f)_a$ 的本征值，

那么我们就称 a 为映射 f 的 Lefshetz 不动点．如果 f 的所有的不动点都是 Lefshetz 不动点，那么我们就称 f 为 Lefshetz 映射．

设 M 是紧致 C^∞ 流形，$f \in C^\infty(M, M)$ 是 Lefshetz 映射．试证：f 的不动点集合是有限集．

第六章　向量场与流，Morse 函数

§1　向量场与流

设 M 是一个 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$．切丛 TM 的任何一个 C^k 截面 $(0\leqslant k\leqslant r-1)$ 被称为一个 C^k 向量场．换言之，M 的 C^k 向量场 Γ 是这样一个 C^k 映射

$$\Gamma: M\rightarrow TM,$$

它使得

$$\Gamma(p)\in T_pM,\quad \forall p\in M.$$

设 $\dim M=m$．对于 M 的任意一个局部坐标图卡 (U,φ)，向量场 $\Gamma|U$ 可以表示为

$$\Gamma(\varphi^{-1}(x))=\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \forall x\in\varphi(U).$$

于是，Γ 局部表示成 $\varphi(U)$ 上的向量场

$$\xi(x)=(\xi_1(x),\cdots,\xi_m(x)).$$

在本书中，我们所涉及的主要是 C^∞ 向量场．

在第一章里，我们把流形上某点的切向量定义为"在该点相切的曲线的等价类"．设 M 是一个 m 维的 C^∞ 流形，J 是任意一个实数区间．考察 C^∞ 映射

$$\gamma: J\rightarrow M.$$

这样一个映射 γ 常被称为 M 上的一条 C^∞ 曲线(或光滑曲线)．曲线 γ 在它所经过的每一点 $\gamma(t_0)$ 决定了 $T_{\gamma(t_0)}M$ 中的一个切向量，我们约定把这切向量记为 $\dot\gamma(t_0)$．更确切地说，$\dot\gamma(t_0)$ 就是由曲线

$$\delta(t)=\gamma(t_0+t)$$

在 $t=0$ 处所决定的切向量．如果选定 M 在 $\gamma(t_0)$ 点邻近的一个局

部坐标图卡(U,φ)，那么切向量$\dot{\gamma}(t_0)$可以表示为

$$\dot{\gamma}(t_0)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t_0)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中$x_i(t)$是$x(t)=\varphi\circ\gamma(t)$的第$i$个分量($i=1,\cdots,m$)：

$$x(t)=\varphi\circ\gamma(t)=(x_1(t),\cdots,x_m(t)).$$

1.1 定义 设M是一个m维C^∞流形，Γ是M上的一个C^∞向量场，而$\gamma: J\to M$是一条C^∞曲线．如果

$$\dot{\gamma}(t)=\Gamma(\gamma(t)),\quad \forall t\in J, \tag{1.1}$$

那么我们就说γ是向量场Γ的一条**积分曲线**．

在定义1.1的假定条件下，设(U,φ)是M的一个局部坐标图卡，并设$\gamma(J)\subset U$．我们记

$$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_m(t))=\varphi\circ\gamma(t).$$

在这样的约定下，$\dot{\gamma}$和Γ分别表示成

$$\dot{\gamma}(t)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x_i},\qquad \Gamma(\varphi^{-1}(x))=\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

于是(1.1)式可以表示成

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=\xi_i(x(t)),\quad i=1,\cdots,m,$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\xi(x(t)), \tag{1.2}$$

其中$\xi(x)=(\xi_1(x),\cdots,\xi_m(x))$．

我们看到，通过局部坐标表示，(1.1)局部地化成了常微分方程组(1.2)．

1.2 引理 设M是一个m维C^∞流形，Γ是M上的一个C^∞向量场．考察这样一个Cauchy问题

$$\begin{cases}\dot{\gamma}(t)=\Gamma(\gamma(t)),\\ \gamma(0)=p.\end{cases} \tag{1.3}$$

可以断定，对任意的$p_0\in M$，存在p_0点的开邻域V, W和正实数ε,

使得

(i) 对于 $p\in V$ 和 $J=[-\varepsilon,\varepsilon]$, Cauchy 问题(1.3)的解 $\gamma(t,p)$ 在 $t\in J$ 范围内存在而且唯一;

(ii) $\gamma(t,p)$ 定义了一个从 $J\times V$ 到 M 的光滑映射;

(iii) $\gamma(J\times W)\subset V$.

证明 选取 p_0 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ),使得

$$\varphi(p_0)=0,\quad \varphi(U)=B_4,$$

并记

$$K=\overline{B}_3,\quad V=\varphi^{-1}(B_2),\quad W=\varphi^{-1}(B_1).$$

于是,(1.3)局部表示成

$$(1.4)\qquad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\xi(x),\\ x(0)=a.\end{cases}$$

常微分方程理论的有关定理保证了 Cauchy 问题(1.4)的解的局部存在唯一性. 这里只须说明: 对于某个实数 $\varepsilon>0$ 和所有的 $a\in B_2$, 问题(1.4)的解至少在 $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ 的范围内存在. 为此,我们记

$$b=\sup_{x\in K}\{\|\xi(x)\|,\ \|\mathrm{D}\xi(x)\|\}.$$

然后考察与(1.4)等价的积分方程组

$$(1.5)\qquad x(t)=a+\int_0^t\xi(x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

设算子 A 是这样定义的:

$$(Ax)(t)=a+\int_0^t\xi(x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

如果 J 是包含 0 的闭区间, $a\in B_2$, 并且

$$x(t),\ y(t)\in K,\quad \forall t\in J,$$

那么对于 $t\in J$ 显然有

$$\|(Ax)(t)-a\| \leqslant b|t|,$$

$$\|(Ax)(t)-(Ay)(t)\| \leqslant b|t| \sup_{\tau \in J} \|x(\tau)-y(\tau)\|.$$

我们取 $\varepsilon \in (0, 1/b)$, 并记 $J=[-\varepsilon, \varepsilon]$. 然后从 $x^{(0)}(t) \equiv a$ 开始，定义迭代序列

(1.6) $$x^{(n)}(t)=(Ax^{(n-1)})(t), \quad t \in J, \quad n=1,2,\cdots.$$

利用上面得到的估计式，很容易证明序列(1.6)是一致收敛的．该序列的极限函数是(1.5)在 $t \in J$ 范围内的解．至此，我们已经证明了：对于 $a \in B_2$, 问题(1.4)的解至少在 $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ 的范围内存在．

根据常微分方程的有关定理，问题(1.4)的解 $x(t,a)$ 是唯一的，并且 $x(t,a)$ 定义了一个从 $J \times B_2$ 到 $\mathbf{R}^m$ 中的光滑映射．还容易验证

$$x(J \times B_2) \subset B_3, \qquad x(J \times B_1) \subset B_2.$$

返回到流形 M, 我们已完成了引理的证明． □

1.3 引理 条件和记号的约定皆同引理 1.2. 如果 $p \in W$ 并且

$$|s|+|t|<\varepsilon,$$

那么就有

$$\gamma(t, \gamma(s,p))=\gamma(t+s,p),$$

因而有
$$\gamma(t, \gamma(s,p))=\gamma(s, \gamma(t,p)).$$

证明 我们记 $\delta(t)=\gamma(t+s,p)$. 容易看出，这样定义的 δ 使得

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t)=\Gamma(\delta(t)), \\ \delta(0)=\gamma(s,p). \end{cases}$$

因为 $p \in W$, 所以 $\gamma(s,p) \in V$. 根据引理 1.2 中的唯一性论断，应该有

$$\delta(t)=\gamma(t, \gamma(s,p)).$$

这就是
$$\gamma(t+s,p)=\gamma(t, \gamma(s,p)). \qquad \square$$

1.4 定义 设 Γ 是 M 上的向量场．我们把集合

$$\operatorname{supp}\Gamma=\overline{\{x \in M \mid \Gamma(x) \neq 0\}}$$

叫做 Γ 的支集．若 $\operatorname{supp}\Gamma$ 是紧致的，则称 Γ 为紧支向量场．

1.5 定理 设 M 是光滑流形，Γ 是 M 上的紧支光滑向量场，则存在光滑映射

$$\gamma: \mathbb{R}\times M \to M$$

使得 $\gamma(t,p)$ 是以下 Cauchy 问题的唯一解：

$$(1.7)\qquad \begin{cases}\dot{\gamma}(t,p)=\Gamma(\gamma(t,p)),\\ \gamma(0,p)=p.\end{cases}$$

(这样的 γ 被称为：由向量场 Γ 生成的流) 还可断定

$$\gamma(t,p)\equiv p,\quad \forall p\in M\setminus \operatorname{supp}\Gamma.$$

并且，如果记 $\gamma_t(p)=\gamma(t,p)$，那么

$$\gamma_t: M\to M\quad (t\in\mathbb{R})$$

是 M 的一个单参数变换群．这就是说，光滑映射 γ 所产生的映射族 $\{\gamma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 能够满足以下两个条件：

(0) $\gamma_0=\mathrm{id}$ (M 的恒同变换)；

(1) $\gamma_t\circ\gamma_s=\gamma_{t+s}$，$\forall t,s\in\mathbb{R}$.

证明 记 $H=\operatorname{supp}\Gamma$．对每一点 $p_0\in H$，都有满足引理 1.2 要求的开邻域 V_{p_0}，W_{p_0} 和正实数 $\varepsilon(p_0)$．因为 H 是紧致集，所以存在有限个点 $p_1,\cdots,p_N$，使得 $W_{p_1}\cup\cdots\cup W_{p_N}\supset H$．我们记

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon(p_i)\mid i=1,\cdots,N\},\quad J=[-\varepsilon,\varepsilon].$$

根据引理 1.2，存在光滑映射

$$\gamma^{(i)}: J\times V_{p_i}\to M,$$

使得对于 $p\in V_{p_i}$，问题 (1.7) 在 $t\in J$ 范围内的唯一解是 $\gamma^{(i)}(t,p)$，并且

$$\gamma^{(i)}(J\times W_{p_i})\subset V_{p_i}.$$

根据该引理的唯一性论断，我们看到

(i) 如果 $V_{p_i}\cap V_{p_j}\neq\varnothing$，那么对于 $p\in V_{p_i}\cap V_{p_j}$ 和 $t\in J$ 有

$$\gamma^{(i)}(t,p)=\gamma^{(j)}(t,p);$$

(ii) 如果 $V_{p_k}\cap(M\setminus H)\neq\varnothing$，那么对于 $p\in V_{p_k}\cap(M\setminus H)$ 和 $t\in J$ 有

$$\gamma^{(k)}(t,p)=p.$$

于是，在 M 上可以无歧义地定义这样一个映射

(1.8) $$\gamma(t,p)=\begin{cases}\gamma^{(i)}(t,p), & \forall p\in W_{p_i},\\ p, & \forall p\in M\setminus H.\end{cases}$$

容易看出，由 (1.8) 定义的 $\gamma: J\times M\to M$ 是一个光滑映射，该映射具有这样的性质：如果 $|t|+|s|<\varepsilon$，那么

(1.9) $$\gamma(t,\gamma(s,p))=\gamma(t+s,p).$$

分别考察 $p\in W_{p_i}$ 和 $p\in M\setminus H$ 的情形，可以很容易地验证上述性质．如果记 $\gamma_t(p)=\gamma(t,p)$，那么 (1.9) 式可以写成

(1.10) $$\gamma_t\circ\gamma_s=\gamma_{t+s}\quad(|t|+|s|<\varepsilon).$$

以 (1.10) 式为起始点，用归纳法可以证明：如果 $|t_1|+|t_2|+\cdots+|t_k|<\varepsilon$，那么就有

(1.11) $$\gamma_{t_1}\circ\gamma_{t_2}\circ\cdots\circ\gamma_{t_k}=\gamma_{t_1+t_2+\cdots+t_k}.$$

下面，我们将利用这一重要性质，设法将 $\gamma: J\times M$ 的定义范围扩展到 $\mathbb{R}\times M$.

对于任意的 $t\in\mathbb{R}$，取 $n\in\mathbb{N}$，使得

(1.12) $$|t/n|<\varepsilon.$$

然后扩充定义

(1.13) $$\gamma(t,p)=\gamma_{t/n}\circ\gamma_{t/n}\circ\cdots\circ\gamma_{t/n}(p)$$

（等号右端是 $\gamma_{t/n}$ 的 n 重复合）．请注意，这样的定义不依赖于 $n\in\mathbb{N}$ 的具体选择（只要条件 (1.12) 得以满足）．事实上，假若 $n'\in\mathbb{N}$ 也使得 $|t/n'|<\varepsilon$，那么就有

$$\begin{aligned}\gamma_{t/n}\circ\gamma_{t/n}\circ\cdots\circ\gamma_{t/n}&=\gamma_{t/(nn')}\circ\gamma_{t/(nn')}\circ\cdots\circ\gamma_{t/(nn')}\\&=\gamma_{t/n'}\circ\gamma_{t/n'}\circ\cdots\circ\gamma_{t/n'}.\end{aligned}$$

上式中的三个复合映射的复合重数依次为 n, nn' 和 n'.

容易看出，由 (1.13) 定义的 $\gamma: \mathbb{R}\times M\to M$ 是光滑映射，并且 $\gamma_t(p)=\gamma(t,p)$ 具有良好的性质：

(0) $\gamma_0=\mathrm{id}$,

(1) $\gamma_t\circ\gamma_s=\gamma_{t+s}$, $\forall t,s\in\mathbb{R}$.

利用关系式 $\gamma(t+t_0,p)=\gamma(t,\gamma(t_0,p))$，我们得到

$$\dot{\gamma}(t_0,p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t,\gamma(t_0,p))|_{t=0}=\Gamma(\gamma(t_0,p)).$$

另外，根据引理 1.2，很容易验证：$\gamma(t,p)$ 是问题 (1.7) 的唯一解．　□

1.6 注记　设 $\gamma_t: M\to M$ 定义为：

$$\gamma_t(\cdot)=\gamma(t,\cdot).$$

则容易看出，每个 γ_t 都具有光滑的逆映射 γ_{-t}，因而 $\gamma_t: M\to M$ 是光滑同胚．这是一种构造微分同胚的非常有效的办法．

§2　流形的匀齐性

同以前一样，我们约定记 $B_r=\{x\in\mathbb{R}^m\,|\,\|x\|<r\}$．

2.1 引理　对任意的 $p,q\in B_1$，存在光滑映射

$$\gamma:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$$

适合以下这些条件：

(1) $\gamma_t(\cdot)=\gamma(t,\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 是光滑映射，并且 $\gamma_0=\mathrm{id}$;

(2) $\gamma_t(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}^m\setminus B_4$;

(3) $\gamma_1(p)=q$.

证明　取光滑函数 $\eta:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$，满足如下条件：

(i) $0\leqslant\eta(x)\leqslant 1,\ \forall x\in\mathbb{R}^m$,

(ii) $\eta(x)=1,\ \forall x\in\overline{B}_3$,

(iii) $\mathrm{supp}\,\eta\subset B_4$.

我们定义 $\mathbb{R}^m$ 上的紧支向量场

$$\Gamma(x)=\eta(x)(q-p),$$

然后求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\Gamma(\gamma),\\ \gamma(0)=a.\end{cases}\tag{2.1}$$

这等价于求解

$$(2.2)\qquad \gamma(t,a)=a+\int_0^t \eta(\gamma(\tau,a))(q-p)\mathrm{d}\tau.$$

我们已经知道(2.1)(或(2.2))的解是存在并且唯一的，现在的问题是：需要对 $a\in B_1$ 和 $t\in J=[-1,1]$ 求出解的具体表示式．为此，先利用(2.2)作如下的估计：

$$\|\gamma(t,a)\|\leqslant\|a\|+|t|\cdot\|q-p\|<3.$$

由此可知，对于 $a\in B_1$ 和 $t\in J=[-1,1]$ 有

$$\gamma(t,a)=a+\int_0^t (q-p)\mathrm{d}\tau.$$

也就是

$$(2.3)\qquad \gamma(t,a)=a+t(q-p),\quad \forall a\in B_1,\quad t\in J=[-1,1].$$

设 $\gamma:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\rightarrow\mathbb{R}^m$ 是由如上定义的向量场 Γ 所决定的光滑流．我们指出：γ 满足引理的全部要求．显然(1)和(2)是成立的，只有(3)尚须验证．由(2.3)式可得

$$\gamma_1(x)=x+(q-p),\quad \forall x\in B_1.$$

因而 $\gamma_1(p)=q$．　□

下面的定理揭示了连通流形的匀齐性质．

2.2 定理　设 M 是光滑流形，M_0 是 M 的任意一个连通开集，p 和 q 是 M_0 中的任意两点．则存在同伦于 id 的光滑同胚 $h:M\rightarrow M$，使得

(i) $h(p)=q$；

(ii) $h(x)=x,\ \forall x\in M\setminus M_0$．

特别地，如果 M 自身是连通的，那么对于 M 的任意两点 p 和 q，存在同伦于 id 的光滑同胚 $h:M\rightarrow M$，使得

$$h(p)=q.$$

证明　对于 M_0 的任意两点 a 和 b，如果存在同伦于 id 的光滑同胚 $k=k_{b,a}:M\rightarrow M$，使得

(1) $k(a)=b$,

(2) $k(x)=x,\ \forall x\in M\setminus M_0$,

那么我们就约定记

$$a\sim b.$$

容易看到,这样定义的“$\sim$”是 M_0 的点之间的一种等价关系(练习 F.3),因而 M_0 是互不相交的等价类的并集. 根据引理 2.1 可以判定:由关系“$\sim$”所决定的每一个等价类都是一个开集. 因为 M_0 是连通集,所以只能有单独一个等价类. 因而 M_0 的任意两个点 p 和 q 相互等价,即 $p\sim q$. □

2.3 推论 设 M 是连通的光滑流形,其维数 $\dim M=m\geqslant 2$. 则对于任意的 $p_1,\cdots,p_n\in M$ 和 $p,q\in M\setminus\{p_1,\cdots,p_n\}$,存在同伦于 id 的光滑同胚 $h: M\to M$,使得

$$h(p)=q;\quad h(p_i)=p_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

证明 容易看出: $M_0=M\setminus\{p_1,\cdots,p_n\}$ 是 M 中的连通开集. □

2.4 定理 设 M 是连通的光滑流形,其维数 $\dim M=m\geqslant 2$. 则对于 M 中互不相同的点 $p_1,\cdots,p_n$ 和 $q_1,\cdots,q_n$,存在同伦于 id 的光滑同胚 $h: M\to M$,使得

$$h(p_i)=q_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

证明 根据推论 2.3,对每一个 $i\in\{1,\cdots,n\}$,存在同伦于 id 的光滑同胚 $h_i: M\to M$,使得

(1) $h_i(p_i)=q_i$;

(2) $h_i(q_j)=q_j,\ \forall j<i$;

(3) $h_i(p_k)=p_k,\ \forall k>i$.

我们定义

$$h=h_n\circ h_{n-1}\circ\cdots\circ h_1.$$

容易验证: 这样的 h 满足定理的要求. □

§3 Morse 函数

设 M 是一个光滑流形，$f: M \to \mathbb{R}$ 是一个光滑映射，$p \in M$．如果

$$\operatorname{rank}_p f = 0 < 1,$$

那么 p 就是 f 的临界点．用局部坐标来表示，p 为 f 的临界点的充分必要条件是：对于 p 点邻近的任意一个局部坐标图卡 (U, φ)，在 $a = \varphi(p)$ 点，函数 $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ 的所有的一阶偏导数都等于 0，即

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^1}(a) = \cdots = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x^m}(a) = 0.$$

3.1 定义 设 M 是一个光滑流形，$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$．如果 p 是 f 的临界点，并且 f 的局部表示 $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$ 在 $a = \varphi(p)$ 点的二阶偏导数方阵(通常称之为 Hesse 方阵)非退化，即

$$\det\left(\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(p))\right) \neq 0, \tag{3.1}$$

那么我们就称 p 为 f 的非退化临界点．(作为练习，请读者验证这样一个事实：上面定义中的条件 (3.1) 不依赖于局部坐标的具体选择．)

3.2 定义 设 M 是一个 C^∞ 流形，$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$．如果 f 的所有的临界点都是非退化的，那么我们就称 f 为 Morse 函数．

下面将用我们已经很熟悉的方法去证明：Morse 函数是"相当多"的．

3.3 引理 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$，$K$ 是包含于 U 中的紧致集．如果 f 在 K 上没有退化的临界点，那么在 C^2 意义下与 f 充分接近的 $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ 也具有同样的性质：g 在 K 上没有退化的临界点．

证明 考察表示式

$$\Delta(f,x)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\right)^2+\left(\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x)\right)\right)^2.$$

显然 f 在 K 上没有退化临界点的充分必要条件是

$$\Delta(f,x)>0,\quad \forall x\in K. \tag{3.2}$$

如果(3.2)成立，那么只要 g 在 C^2 意义下与 f 充分接近，也就有

$$\Delta(g,x)>0,\quad \forall x\in K.$$

因而 g 在 K 上也没有退化临界点. □

3.4 引理 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f\in C^\infty(U,\mathbb{R})$. 则存在长度可任意小的向量 $b\in\mathbb{R}^m$，使得函数

$$g(x)=f(x)-b\cdot x$$

在 U 上没有退化临界点.

证明 设 $F\in C^\infty(U,\mathbb{R}^m)$是这样定义的:

$$F(x)=\mathrm{D}f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

根据Sard 定理，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在映射 F 的正则值 $b\in\mathbb{R}^m$，使得 $\|b\|<\varepsilon$. 我们记

$$g(x)=f(x)-b\cdot x.$$

显然有

$$\mathrm{D}g(x)=\mathrm{D}f(x)-b=F(x)-b,$$

$$\mathrm{D}^2g(x)=\mathrm{D}F(x).$$

因为 b 不是 F 的临界值，所以任何

$$a\in\{x\in\mathbb{R}^m\mid \mathrm{D}g(x)=F(x)-b=0\}$$

都使得

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)=\mathrm{D}^2g(a)=\mathrm{D}F(a)$$

非退化. □

3.5 引理 设 M 是一个 C^∞ 流形，$f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，$H$ 是 M 中的紧致集，f 在 H 上没有退化临界点，δ 是任意给定的正实数. 又设(U,φ)是 M 的局部坐标图卡，V 和 W 是包含在 U 之中的开

集，并且

$$\varphi(U)=B_3,\quad \varphi(V)=B_2,\quad \varphi(W)=B_1.$$

则存在 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足这样的条件：

(i) $g(p)=f(p),\ \forall p\in M\setminus V$；

(ii) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上没有退化临界点；

(iii) $|g(p)-f(p)|<\delta,\ \forall p\in M$.

证明 取 $\eta\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall p\in V\setminus\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall p\in M\setminus V.\end{cases}$$

记 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$. 根据引理 3.4, 存在长度可任意小的 $b\in\mathbb{R}^m$, 使得

$$\tilde{f}(x)-b\cdot x$$

在 $\varphi(U)=B_3$ 上没有退化临界点．我们定义

$$g(p)=f(p)-\eta(p)(b\cdot\varphi(p)).$$

容易看出，在$\overline{W}$ 上函数 g 没有退化的临界点．另外，如果取 b 充分小，可使 g 在 U 上与 f 按 C^2 意义充分接近，因而可使 g 在$\overline{V}\cap H$ 上没有退化临界点．在 V 以外的地方，显然有 $g(p)=f(p)$. 因而，只要 b 取得足够小，所定义的 g 就满足引理的全部要求． □

3.6 定理 设 M 是一个 C^∞ 流形，$f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$．则对任意给定的正值函数 $\varepsilon\in C^0(M,\mathbb{R})$, 存在 Morse 函数 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, 使得

$$|g(p)-f(p)|<\varepsilon(p),\quad \forall p\in M.$$

证明 选取可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集

$$V_i,W_i\subset U_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

满足条件：

(1) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族；

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3,\ \varphi_i(V_i)=B_2,\ \varphi_i(W_i)=B_1$；

(3) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M.

因为$\overline{V}_i$ 是 M 中的紧致集，所以

$$\varepsilon_i = \inf\{\varepsilon(p) \mid p \in \overline{V}_i\} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

约定记

$$\delta_i = \min\{\varepsilon_j \mid \overline{V}_j \cap \overline{V}_i \neq \varnothing\}, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

我们归纳构造一列函数 $f_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. 首先置 $f_0 = f$, 并记 $H_0 = \varnothing$, 然后依次定义 $f_1, f_2, \cdots$, 满足这样一些条件:

(Ⅰ$_i$) $f_i(p) = f_{i-1}(p)$, $\forall p \in M \setminus \overline{V}_i$;

(Ⅱ$_i$) 函数 f_i 在

$$H_i = H_{i-1} \cup \overline{W}_i = \bigcup_{j=1}^{i} \overline{W}_j$$

之上没有退化临界点;

(Ⅲ$_i$) $|f_i(p) - f_{i-1}(p)| < \delta_i / 2^i$, $\forall p \in M$.

在此基础上, 定义

$$g(p) = \lim_{k \to \infty} f_k(p).$$

容易验证: $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$是 Morse 函数, 并且

$$|g(p) - f(p)| < \varepsilon(p), \quad \forall p \in M. \qquad \square$$

Morse 函数在许多数学分支中有重要的应用. 限于篇幅, 不能在这里逐一介绍. 感兴趣的读者可以参看文献[Gr], [Ka] 和[Mi].

练 习 F

F.1. 设 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场. 试对以下(a)和(b)两种情形分别求出由 Γ 生成的单参数变换群 $\gamma_t(x, y)$(请说明这两个群分别由怎样的一些变换组成):

(a) $\Gamma(x, y) = -y \dfrac{\partial}{\partial x} + x \dfrac{\partial}{\partial y}$;

(b) $\Gamma(x, y) = x \dfrac{\partial}{\partial x} + y \dfrac{\partial}{\partial y}$.

F.2. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 函数, $\Gamma(x) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots,$

$\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$是$f$的梯度向量场，$\gamma_t$是由向量场$\Gamma$生成的单参数变换群．试证：如果$s \geqslant t$，那么

$$f(\gamma_s(x)) \geqslant f(\gamma_t(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

F.3. 考察定理 2.2 证明中所定义的关系"～"．验证"～"是一种等价关系．

F.4. 设M是连通的C^∞流形．试证M中的任意两点都可以用M的 1 维正则C^∞子流形予以联结．

F.5. 设M是紧致光滑流形．试证：存在M上的 Morse 函数f，它在不同的临界点处取不同的值．

F.6. 设M是光滑流形．试证：M的全体 Morse 函数的集合是$C^\infty(M, \mathbb{R})$中的稠密开集．

F.7. 设M是$\mathbb{R}^n$的正则光滑子流形．试证存在线性函数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使得$f|M$是$M$上的 Morse 函数．

F.8. 设M是$\mathbb{R}^n$的正则光滑子流形，$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$．试证几乎所有的$u \in \mathbb{R}^n$都使得如下定义的$g$成为 Morse 函数：

$$g: M \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto f(x) + u \cdot x,$$

其中$u \cdot x$表示向量u与向量x的数量积．(这是一个很有意思的结果．据此可以作出练习 F.7 的另一解答．)

F.9. 设M是$\mathbb{R}^n$的正则光滑子流形．试证：几乎所有的$u \in \mathbb{R}^n$都使得由$f(x) = \|x - u\|^2$定义的$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$成为 Morse 函数．

第七章　一维流形的分类与 Brouwer 不动点定理

1 维流形是最简单的流形．在 §1 中，我们将证明：任何一个连通的 1 维微分流形，或者微分同胚于圆周 S^1，或者微分同胚于实数区间 $[0, 1]$，$[0, 1)$，$(0, 1)$ 之一．由此可知，本质上只有四种不同的 1 维连通微分流形，其中紧致的只有两种．利用 1 维流形分类的重要结论，我们将在 §2 给出 Brouwer 不动点定理一个简单的证明．

§1　一维微分流形的分类

一般约定　在本节中，我们假定 M 是任意一个 1 维微分流形．根据 Whitney 嵌入定理，不妨设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 的正则子流形，因而切丛 TM 上赋有由 $\mathbb{R}^3$ 的 Euclid 内积诱导的 Riemann 度量．

$\mathbb{R}$ 中多于一点的连通集合只能是 (a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$ 或者 $[a, b]$ 这样的区间．我们将着重考察从任意一个实数区间 I 到 M 中的 C^1 映射．

1.1　定义　设 I 是任意一个实数区间，$\alpha: I \to M$ 是一个 C^1 映射．如果 α 在 I 中任意一点邻近都是局部微分同胚，那么我们就称 $\alpha: I \to M$ 是 M 的一个参数化（或参数表示）．如果 M 的参数表示 $\alpha: I \to M$ 满足这样的条件：

$$\|\alpha'(t)\| = 1, \quad \forall t \in I,$$

那么我们就说 α 是 M 的一个弧长式参数化（或弧长式参数表示）．

设 p 是 M 的任意一点．则 p 点邻近适当的局部坐标映射的逆映射就可以看成一个参数表示．因而必定存在参数化 $\alpha: I \to$

M, 使得 $p\in\alpha(I)$. 如果换用新的参数

$$s=s_0+\int_{t_0}^{t}\|\alpha'(t)\|\,dt,$$

那么
$$\beta(s)=\alpha(t(s))$$
就定义了一个弧长式参数表示. 这后一事实可验证如下:

$$\beta'(s)=\alpha'(t)\frac{dt}{ds}=\alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|,\quad \|\beta'(s)\|=1.$$

1.2 引理 设 $\alpha: I\to M$ 和 $\beta: J\to M$ 是 M 的两个弧长式参数化. 如果 $t_0\in I\cap J$ 使得

$$\alpha(t_0)=\beta(t_0),\quad \alpha'(t_0)=\beta'(t_0),$$

那么就有

$$\alpha(t)=\beta(t),\quad \forall t\in I\cap J.$$

于是,在实数区间 $K=I\cup J$ 上可以定义

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(t), & \forall t\in I,\\ \beta(t), & \forall t\in J.\end{cases}$$

这样定义的 $\gamma: K\to M$ 也是 M 的弧长式参数表示,并且

$$\gamma(K)=\alpha(I)\cup\beta(J).$$

证明 因为 α 和 β 都是局部微分同胚,所以在 t_0 点邻近局部可定义 $f(t)=\beta^{-1}\circ\alpha(t)$. 经过局部参数变换,我们得到

$$\beta(f(t))=\alpha(t),\quad \beta'(f(t))f'(t)=\alpha'(t).$$

因为
$$\|\beta'(f(t))\|=\|\alpha'(t)\|=1,$$
所以
$$f'(t)=\pm 1.$$
注意到 $f(t_0)=t_0$, $f'(t_0)=1$, 可以断定在 t_0 邻近有

$$f'(t)=1,\quad f(t)=t.$$

因为在 t_0 邻近 $f(t)=\beta^{-1}\circ\alpha(t)$ 实际上是恒同映射,所以在 $I\cap J$ 的含有 t_0 的某一段子区间上有

$$\alpha(t)=\beta(t),\quad \alpha'(t)=\beta'(t).$$

考察这样一个集合

$$E=\{t\in I\cap J \mid \alpha(t)=\beta(t),\ \alpha'(t)=\beta'(t)\}.$$

从上面的讨论可知，E 是 $I\cap J$ 中的一个开集．还容易看出，E 是 $I\cap J$ 中的闭集．因为 $I\cap J$ 是连通集，所以必有 $E=I\cap J$．于是在 $K=I\cup J$ 上可定义

$$\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(t), & t\in I,\\ \beta(t), & t\in J.\end{cases}$$

我们完成了引理的证明． □

1.3 引理 设 $\alpha: I\to M$ 和 $\beta: J\to M$ 都是弧长式参数化．如果 $\alpha(I)\cap\beta(J)\neq\varnothing$，那么存在 M 的弧长式参数化 $\gamma: K\to M$，使得

$$\gamma(K)=\alpha(I)\cup\beta(J).$$

证明 设 $p\in\alpha(I)\cap\beta(J)$，并设 $\alpha(t_0)=\beta(t_1)=p$．我们定义（表示式中的"±"号待稍后选定）

$$\tilde{\beta}(t)=\beta(\pm(t-t_0)+t_1).$$

这样得到一个弧长式参数化 $\tilde{\beta}: \tilde{J}\to M$，满足条件

$$\tilde{\beta}(\tilde{J})=\beta(J).$$

适当选择 $\tilde{\beta}$ 表示式中的"±"号，可使

$$\tilde{\beta}(t_0)=\alpha(t_0),\quad \tilde{\beta}'(t_0)=\alpha'(t_0).$$

于是，根据引理 1.2，存在弧长式参数化 $\gamma: K\to M$，使得

$$\gamma(K)=\alpha(I)\cup\tilde{\beta}(\tilde{J})=\alpha(I)\cup\beta(J). \qquad \square$$

1.4 引理 设 M 是连通的 1 维微分流形，则存在弧长式参数表示 $\alpha: I\to M$，使得

$$\alpha(I)=M.$$

证明 首先，任意取定一个弧长式参数表示 $\beta_0: J_0\to M$．不妨设

$$0\in J_0,\quad \beta_0(0)=p_0,\quad \beta_0'(0)=\xi_0.$$

考察所有的满足下面条件(1.1)的弧长式参数表示 $\beta: J\to M$:

$$0\in J,\quad \beta(0)=p_0,\quad \beta'(0)=\xi_0. \tag{1.1}$$

设 E 是 M 的这样一个子集合，它由所有满足下面条件 (1.2) 的点

$p \in M$ 组成：

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \text{存在满足条件(1.1)的弧长式参数} \\ \text{表示 } \beta: J \to M, \text{使得 } p \in \beta(J). \end{cases}$$

容易证明 E 是 M 中的一个既开且闭的集合．于是，依据 M 的连通性，可以确定 $E = M$.

设 $\beta_i: J_i \to M$ $(i=1, 2)$ 是两个满足条件(1.1)的弧长式参数表示，则必有(根据引理 1.2)：

$$\beta_1 | (J_1 \cap J_2) = \beta_2 | (J_1 \cap J_2).$$

因此，在所有的满足条件(1.1)的弧长式参数表示的定义区间的并集 I 上，可以统一地定义一个弧长式参数表示 $\alpha: I \to M$, 使得

$$\alpha(I) = E = M. \qquad \square$$

1.5 引理 设 $\alpha: I \to M$ 是一个弧长式参数表示；并设存在 $t_0, t_1 \in I$, $t_0 < t_1$, 使得

$$\alpha(t_0) = \alpha(t_1) = p.$$

则必有

$$\alpha'(t_0) = \alpha'(t_1).$$

证明 因为 T_pM 是 1 维向量空间，所以

$$\alpha'(t_0) = \pm \alpha'(t_1).$$

我们指出不可能有 $\alpha'(t_0) = -\alpha'(t_1)$. 否则，由于

$$\alpha(t_0) = \alpha(t_1), \quad \alpha'(t_0) = -\alpha'(t_1),$$

对 $\alpha(t)$ 和 $\alpha(-(t-t_0)+t_1)$ 这两个弧长式参数表示应用引理 1.2 就得到 $(\forall t \in [t_0, t_1])$：

$$\alpha(t) = \alpha(-(t-t_0)+t_1).$$

因而有

$$\alpha'(t) = -\alpha'(-(t-t_0)+t_1).$$

在最后这个式子中取 $t = \dfrac{t_0+t_1}{2}$，就得到矛盾的结果

$$\alpha'\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) = -\alpha'\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right).$$

根据以上讨论，我们确认 $\alpha'(t_0) = \alpha'(t_1)$. $\square$

1.6 定理 任何一个连通的1维微分流形 M 或者微分同胚于圆周 S^1，或者微分同胚于实数区间 $(0,1)$，$[0,1)$ 与 $[0,1]$ 这三者之一.

由此可知，本质上只有四种不同的1维连通的微分流形，其中紧致的只有两种：或者微分同胚于圆周 S^1，或者微分同胚于闭区间 $[0,1]$.

证明 根据引理1.4，存在 M 的弧长式参数化 $\alpha: I\to M$，使得 $\alpha(I)=M$. 以下分两种情形讨论.

情形A $\alpha: I\to M$ 是单映射. 对这一情形，$\alpha: I\to M$ 是单满映射，并且按照参数化的定义，α 还是局部微分同胚. 于是，$\alpha: I\to M$ 实际上是整体微分同胚. 因而 M 微分同胚于 $(0,1)$，$[0,1)$ 或者 $[0,1]$ 这三者之一.

情形B $\alpha: I\to M$ 不是单映射. 对这情形，不妨设 $0\in I$ 并且存在 $t\in I$, $t>0$，使得 $\alpha(t)=\alpha(0)$. 我们记

$$\tau=\inf\{t\in I \mid t>0,\ \alpha(t)=\alpha(0)\}.$$

因为 $\alpha: I\to M$ 是局部微分同胚，所以显然有 $\tau>0$. 这样的 τ 显然使得 $\alpha(\tau)=\alpha(0)$. 我们指出：$\alpha|[0,\tau)$ 是单映射. 否则，存在 t_0, $t_1\in[0,\tau)$, $t_0<t_1$，使得 $\alpha(t_0)=\alpha(t_1)$. 根据引理1.5，还应有 $\alpha'(t_0)=\alpha'(t_1)$. 因而对 $t\in[0,\tau-(t_1-t_0))$ 应有 $\alpha(t)=\alpha(t+(t_1-t_0))$. 特别地有

$$\alpha(0)=\alpha(t_1-t_0),\quad 0<t_1-t_0<\tau.$$

这与 τ 的最小性质相矛盾.

据以上讨论并根据引理1.5，我们获悉

$$\alpha(\tau)=\alpha(0),\quad \alpha'(\tau)=\alpha'(0). \tag{1.3}$$

考察以下这些弧长式参数表示：

$$\alpha_k(t)=\alpha(t-k\tau),\quad t\in I+k\tau,\ k\in\mathbf{Z}\ .$$

由(1.3)可知

$$\alpha_k((k+1)\tau)=\alpha_{k+1}((k+1)\tau),\quad \alpha_k'((k+1)\tau)=\alpha'_{k+1}((k+1)\tau).$$

因而可以定义这样一个弧长式参数表示：

$$\widetilde{\alpha}(t)=\alpha_k(t)=\alpha(t-k\tau),\quad t\in[k\tau,(k+1)\tau],\quad k\in\mathbf{Z}\ .$$

这样的弧长式参数化$\widetilde{\alpha}$在$\mathbb{R}$上有定义，并且$\widetilde{\alpha}|I=\alpha$，因而$\widetilde{\alpha}(\mathbb{R})=M$。对于$t\in[k\tau,(k+1)\tau]$，显然有

$$\widetilde{\alpha}(t+\tau)=\alpha(t+\tau-(k+1)\tau)=\alpha(t-k\tau)=\widetilde{\alpha}(t).$$

因而$\widetilde{\alpha}$以τ为周期．由此可知$\widetilde{\alpha}([0,\tau))=M$.

以下为记号简单起见，不妨将上一段所定义的$\widetilde{\alpha}$仍写为α，即假定α：$\mathbb{R}\to M$是一个弧长式参数化，它满足下列条件：

(i) $\alpha|[0,\tau)$是单映射；

(ii) $\alpha([0,\tau))=M$；

(iii) $\alpha(t+\tau)=\alpha(t)$, $\forall t\in\mathbf{R}$.

对于$\omega=2\pi/\tau$，考察S^1的参数化

$$\beta:\mathbf{R}\to S^1$$
$$t\mapsto(\cos\omega t,\sin\omega t).$$

容易看出：

$$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)\Longleftrightarrow\beta(t_1)=\beta(t_2)\tag{1.4}$$

(因为二者都等价于$(t_1-t_2)/\tau\in\mathbf{Z}$). 因而存在从$M$到$S^1$的单满映射$\gamma$：$M\to S^1$，使得$\gamma\circ\alpha=\beta$，即使得以下图表可交换(图 20)：

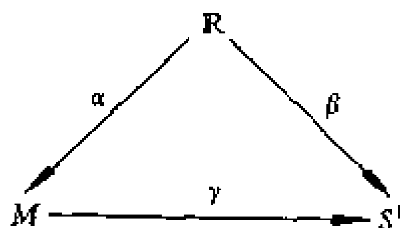


图 20

因为α和β在$\mathbb{R}$的每一点邻近都是局部微分同胚，所以γ也在M的每一点邻近是局部微分同胚．γ：$M\to S^1$既是单满映射，又在每一点邻近是局部微分同胚，因而是整体微分同胚． □

作为定理 1.6 的推论，我们得到

1.7 定理 设M是紧致的 1 维微分流形，则∂M由偶数个点组成．

证明 M的每一个连通分支是一个闭集，因而也是紧致的．

每一个连通分支都微分同胚于 S^1 或者$[0, 1]$. 因而 ∂M 含有偶数个点. □

§2 Brouwer 不动点定理

利用上节得到的关于 1 维微分流形分类的结果，我们来证明重要的 Brouwer 不动点定理. 首先，回忆一下"收缩核"的定义.

2.1 定义 设 X 是拓扑空间，A 是 X 的子空间. 如果存在连续映射

$$r: X \to A,$$

使得

$$r(x)=x, \quad \forall x \in A,$$

那么我们就称 A 为 X 的**收缩核**，并且称 r 为**收缩映射**.

记号约定 我们约定分别以 S^{n-1} 和 D^n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面和闭单位球体，即:

$$S^{n-1}=\{x\in \mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}, \quad D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leqslant 1\}.$$

作为带边的 C^∞ 流形，D^n 的边缘是 $\partial D^n=S^{n-1}$.

2.2 定理 S^{n-1} 不是 D^n 的收缩核. 即不存在这样的连续映射 $g: D^n \to S^{n-1}$，它使得

$$g(x)=x, \quad \forall x\in S^{n-1}.$$

证明 用反证法. 假定存在连续映射 $g: D^n \to S^{n-1}$，使得

$$g(x)=x, \quad \forall x\in S^{n-1}.$$

将证明: 必定也存在光滑映射 $f: D^n \to S^{n-1}$，使得

$$f(x)=x, \quad \forall x\in S^{n-1}.$$

为此，我们首先补充 g 的定义，规定

$$g(x)=x, \quad \forall x\in \mathbb{R}^n\setminus D^n. \tag{2.1}$$

这样得到一个连续映射 $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. 其次，我们选取 $\omega\in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，满足以下这些条件:

(a) $\omega(-x)=\omega(x)\geqslant 0, \ \forall x\in \mathbb{R}^n$;

(b) $\operatorname{supp}\omega \subset D^n$;

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(u)\mathrm{d}u = 1$.

然后定义

(2.2) $$\psi_0(x) = g(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

(其中的 g 已经按照(2.1)的规定加以延拓)．显然有

$$\psi_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash D^n.$$

我们构造逼近(2.2)的映射:

(2.3) $$\psi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(u)\psi_0(x+\varepsilon u)\mathrm{d}u.$$

对于 $0<\varepsilon<1/2$, 显然有

(2.4) $$\psi_\varepsilon(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash ((3/2)D^n).$$

通过变换 $y = x + \varepsilon u$, 可以把(2.3)改写成

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\psi_0(y)\mathrm{d}y.$$

由这式容易看出 ψ_ε : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 映射．还容易验证: 当 $\varepsilon \to 0$ 时、由(2.3)所定义的 $\psi_\varepsilon(x)$ 在紧致集 $K=3D^n$ 上一致收敛于 $\psi_0(x)$.

再考察这样一个映射

(2.5) $$\varphi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x) + x.$$

显然 φ_ε : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 仍是 C^∞ 映射．因为当 $\varepsilon \to 0$ 时, φ_ε 在紧致集 $K=3D^n$ 上一致收敛于 g, 而 g 满足条件

$$\|g(x)\| \geqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

所以只要取 $\varepsilon>0$ 充分小, 可设

$$\|\varphi_\varepsilon(x)\| > 1/2, \quad \forall x \in K = 3D^n.$$

我们定义

(2.6) $$f(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(2x)}{\|\varphi_\varepsilon(2x)\|}, \quad \forall x \in D^n.$$

这样定义的 f : $D^n \to S^{n-1}$ 是 C^∞ 映射．从(2.4), (2.5)和(2.6)还容

易看出

$$f(x)=x, \quad \forall x\in S^{n-1}.$$

综上所述，我们证明了：如果存在连续的收缩映射 $g: D^n\to S^{n-1}$，那么也必定存在光滑映射 $f: D^n\to S^{n-1}$，使得

$$(2.7) \qquad f(x)=x, \quad \forall x\in S^{n-1}.$$

设 $q\in S^{n-1}$ 是 f 的一个正则值，考察 D^n 的子集 $f^{-1}(q)$. 根据第五章定理 5.3（带边形式的正则值原像定理），$f^{-1}(q)$ 是 D^n 的 1 维正则 C^∞ 子流形，并且

$$\partial f^{-1}(q)=f^{-1}(q)\cap\partial D^n.$$

作为 D^n 的闭子集，$f^{-1}(q)$ 是紧致的 1 维流形. 根据本章定理 1.7，紧致 1 维微分流形 $f^{-1}(q)$ 的边界 $\partial f^{-1}(q)$ 应由偶数个点组成. 然而，从 (2.7) 式可以看出：

$$\partial f^{-1}(q)=f^{-1}(q)\cap\partial D^n=\{q\}.$$

这样，假定存在连续的收缩映射 $g: D^n\to S^{n-1}$ 最终导致了矛盾的结果. □

2.3 定理（Brouwer 不动点定理） 任何连续映射 $f: D^n\to D^n$ 都必定有不动点. 即必定存在 $x_0\in D^n$，使得

$$f(x_0)=x_0.$$

证明 用反证法. 假定存在没有不动点的连续映射

$$f: D^n\to D^n.$$

对任意的 $x\in D^n$，我们以 $f(x)$ 为起始点，经过 x 点作射线，将该射线与 $\partial D^n=S^{n-1}$ 的交点记为 $g(x)$. 这样定义的连续映射

$$g: D^n\to S^{n-1},$$

显然使得

$$g(x)=x, \quad \forall x\in S^{n-1}.$$

但这与定理 2.2 的结论矛盾.（关于映射 g 的连续性，请参看下面的附注.） □

附注 上面证明中所定义的 $g(x)$ 可以表示为

$$g(x)=f(x)+t(x-f(x)),$$

其中的 $t=t(x)>0$ 使得 $\|g(x)\|^2=1$, 即使得

$$a(x)t^2+2b(x)t+c(x)=0, \tag{2.8}$$

这里

$$a(x)=\|x-f(x)\|^2>0,$$
$$b(x)=(x-f(x))\cdot f(x),$$
$$c(x)=\|f(x)\|^2-1\leqslant 0.$$

对于使得 $c(x)<0$ 的 $x\in D^n$, 方程 (2.8) 的唯一正根是:

$$t(x)=\frac{-b(x)+\sqrt{(b(x))^2-a(x)c(x)}}{a(x)}. \tag{2.9}$$

对于使得 $c(x)=\|f(x)\|^2-1=0$ 的 $x\in D^n$, 我们有

$$b(x)=(x-f(x))\cdot f(x)=x\cdot f(x)-\|f(x)\|^2=x\cdot f(x)-1<0.$$

(这里用到 $f(x)\neq x$ 的假定.) 对这情形方程 (2.8) 也有唯一正根

$$t(x)=-2b(x)/a(x), \tag{2.10}$$

并且这时 (2.10) 式与 (2.9) 式是一致的.

因为由 (2.9) 式所定义的函数 $t(x)$ 是连续的, 所以

$$g(x)=f(x)+t(x)(x-f(x))$$

定义了一个连续映射 $g: D^n\to S^{n-1}$. □

练 习 G

G.1. 设 $E=D^n\backslash\{0\}$. 试举例说明 $f\in C^0(E,E)$ 可以没有不动点.

G.2. 设 B^n 是 $\mathbb{R}^n$ 的开球体. 试举例说明 $f\in C^0(B^n,B^n)$ 可以没有不动点.

G.3. 设 X 是拓扑空间, $f\in C^0(X,D^n)$, $g\in C^0(D^n,X)$. 试证 $g\circ f: X\to X$ 必有不动点.

G.4. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$, $f(S^n)\neq S^n$. 试证 f 必有不动点.

G.5. 试证以下各命题相互等价:

(a) 关于 D^n 的 Brouwer 不动点定理;

(b) S^{n-1} 不是可缩空间 (即 S^{n-1} 的恒同映射不能同伦于常值

映射)；

(c) S^{n-1}不是D^n的收缩核．

G.6. 设$f\in C^0(D^n, \mathbb{R}^n)$. 试证：或者存在$x_0\in D^n$使得$f(x_0)=x_0$；或者存在$y_0\in\partial D^n$和$\lambda>1$，使得$f(y_0)=\lambda y_0$.

G.7. 设$f\in C^0(D^n, D^n)$，$0\notin f(D^n)$. 试证存在$x_0, y_0\in\partial D^n$和$\lambda>0$，$\mu<0$，使得

$$f(x_0)=\lambda x_0,\quad f(y_0)=\mu y_0.$$

G.8. **(Frobenius定理)** 设$n\times n$非退化方阵A的所有元素都是非负实数．求证：A必有正的本征值．

第八章　模 2 映射度与 Borsuk-Ulam 定理

设 M 和 N 是光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^r(M,N)$. 对于给定的 $y\in N$，人们希望知道方程

$$f(x)=y$$

究竟有多少解？至少希望对解的数目 $\#f^{-1}(y)$ 作一个估计．因此有必要考察映射 f 覆盖 y 的“重数”或者“层数”．

对于 $M=N=S^1$(单位圆周)的情形，我们来观察图 21 所示的映射

$$f: S^1\to S^1.$$

虽然映射 f 覆盖 $N=S^1$ 各点的“层数”不尽相同，但在正则值处覆盖层数的奇偶性是一样的，或者说覆盖层数 mod 2 是相同的．如果赋予 M 和 N 适当的定向，考察“正向”的覆盖层数和“负向”的覆盖层数，那么在正则值处覆盖层数的代数和是相同的．

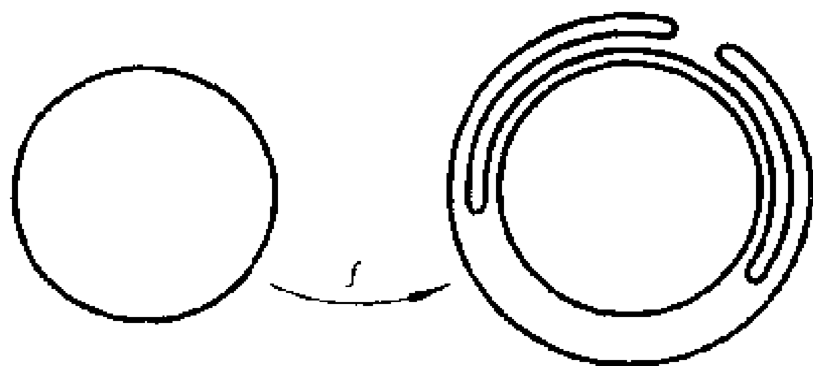


图　21

以上观察为定义映射度提供了启示．我们将从较简单的模 2 理论开始讨论．

第五章 §1 中证明的“唱片引理”是映射度定义的一块基石．这里重述该引理，以提请读者注意．

唱片引理 设 $r\geqslant 1$, M 是紧致 C^r 流形，N 是 C^r 流形，$\dim M=\dim N=m$, $f\in C^r(M,N)$, $y\in N$ 是 f 的正则值．如果 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$, 那么

(1) $f^{-1}(y)$ 是 M 中的有限点集:

$$f^{-1}(y)=\{x_1,\cdots,x_k\};$$

(2) 存在 y 在 N 中的开邻域 V, 使得 $f^{-1}(V)$ 是 M 中不相交开集的并集:

$$f^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

其中开集 U_i 包含 x_i, 并且 f 在 U_i 上的限制映射 $f|U_i$ 是从 U_i 到 V 的 C^r 同胚 $(i=1,\cdots,k)$．

一般约定 在本章中，我们设 M 是(不带边的)紧致光滑流形，N 是(不带边的)光滑流形，$\dim M=\dim N$. 还约定以记号

$$f \pitchfork y$$

表示 y 是可微映射 f 的正则值．

§1 模 2 映射度

先来考察光滑映射 f 对其正则值 y 的模 2 覆盖层数．

1.1 定义 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$\dim M=\dim N$, $f\in C^\infty(M,N)$．对于 f 的正则值 y, 我们约定把

$$\#f^{-1}(y) \pmod 2$$

叫做 f 对 y 的模 2 覆盖层数或模 2 映射度，记为 $\deg_2(f,y)$(常简写成 $d_2(f,y)$).

附注 上面定义中的记号 $\#f^{-1}(y)$ 表示集合 $f^{-1}(y)$ 中的元素数目，而 $\#f^{-1}(y) \pmod 2$ 表示 $\#f^{-1}(y)$ 除以 2 的最小非负剩余(0 或者 1)．

根据“唱片引理”，这样定义的 $d_2(f,y)$ 关于 $y\in N$ 是局部常值函数．即对于 y 的某个邻域内的所有的 z 都有

$$f \pitchfork z,\quad d_2(f,z)=d_2(f,y).$$

1.2 引理 设存在紧致带边流形 X 和光滑映射 $F: X \to N$，使得

$$\partial X = M, \quad \partial F = F|M = f.$$

如果 y 是 F 和 $f = \partial F$ 共同的正则值，那么

$$d_2(f, y) = 0.$$

证明 $F^{-1}(y)$ 是紧致的 1 维光滑流形，它的每个连通分支或者同胚于 S^1，或者同胚于$[0,1]$. 同胚于 S^1 的连通分支不与 $\partial X = M$ 相交；同胚于$[0,1]$的每个连通分支与 $\partial X = M$ 相交于两点. 又因为 $f^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial X$，所以 $\# f^{-1}(y)$ 是偶数，即 $d_2(f, y) = 0$（参看图 22）. □

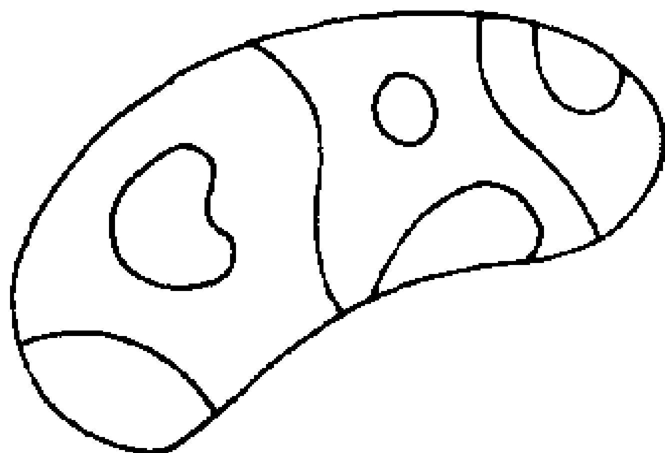


图 22

1.3 引理 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$\dim M = \dim N$，$y \in N$，$f_i \in C^\infty(M, N)$ $(i = 1, 2)$，并且

$$f_1 \pitchfork y, \quad f_2 \pitchfork y.$$

如果 $f_1 \sim f_2$（C^0 同伦），那么

$$d_2(f_1, y) = d_2(f_2, y).$$

证明 f_1 连续同伦于 f_2，它也就必定光滑同伦于 f_2，即存在光滑映射 $H: I \times M \to N$，使得

$$H(t, \cdot) = f_1(\cdot), \quad \forall t \in [0, \delta],$$
$$H(t, \cdot) = f_2(\cdot), \quad \forall t \in [1 - \delta, 1].$$

因为 H 在 $([0,\delta]\times M)\cup([1-\delta,1]\times M)$ 与 y 横截，根据横截扩张定理，存在光滑映射 $F: I\times M\to N$，使得

(1) $F(t,x)=H(t,x),\ \forall t\in[0,\delta]\cup[1-\delta,1],\ x\in M$;

(2) $F \pitchfork y$.

于是，$F^{-1}(y)$ 是 $I\times M$ 的紧致的 1 维正则子流形，它的每个连通分支同胚于 S^1 或者 $[0,1]$，且只有同胚于 $[0,1]$ 的连通分支才与 $\partial(I\times M)=(0\times M)\cup(1\times M)$ 相交. 因为

$$f_1^{-1}(y)=F^{-1}(y)\cap(0\times M),\quad f_2^{-1}(y)=F^{-1}(y)\cap(1\times M),$$

所以 $\# f_1^{-1}(y)$ 与 $\# f_2^{-1}(y)$ 的奇偶性相同(参看图 23). □

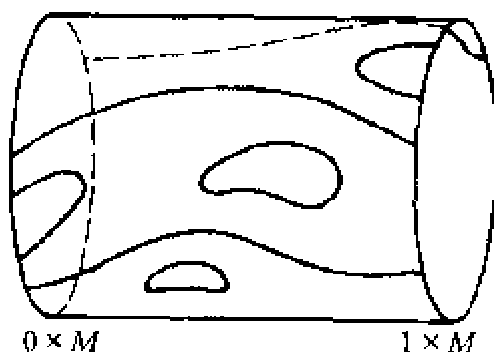


图 23

1.4 引理 设 M 和 N 是光滑流形，$f\in C^0(M,N)$，$y\in N$. 则存在 $f_1\in C^\infty(M,N)$，使得

$$f_1\sim f,\ f_1 \pitchfork y.$$

证明 *方法一* 首先取光滑映射 $f_0\sim f$. 然后引用横截逼近定理确定存在 $f_1\in C^\infty(M,N)$，使得

$$f_1\sim f,\ f_1 \pitchfork y.$$

方法二 首先取光滑映射 $f_0\sim f$. 其次取 y 的连通开邻域 W，并在 W 中取 f_0 的正则值 z. 然后取同伦于 id 的光滑同胚 $h: M\to M$，使得 $h(z)=y$. 记 $f_1=h\circ f_0$，则有

$$f_1\sim f_0.$$

因为 $f_0 \pitchfork z$，所以 $h\circ f_0 \pitchfork h(z)$，即 $f_1 \pitchfork y$． □

下面，我们来定义连续映射 $f: M \to N$ 对任意的 $y\in N$ 的模 2“覆盖层数”，即模 2 映射度．

1.5 定义 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^0(M,N)$，$y\in N$，并设 $f_1\in C^\infty(M,N)$ 适合条件

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

我们定义

$$\deg_2(f,y):=\deg_2(f_1,y).$$

记号 $\deg_2(f,y)$ 也常简写成 $d_2(f,y)$．

1.6 命题 关于 $\deg_2(f,y)$ 的定义确当无歧义，并且所定义的 $\deg_2(f,y)$ 关于 f 的同伦是不变的．

证明 (I) 设 $f_i\in C^\infty(M,N)$ $(i=1,2)$ 适合条件

$$f_i\sim f,\quad f_i\pitchfork y.$$

则有

$$f_1\pitchfork y,\quad f_2\pitchfork y,\quad f_1\sim f_2\ (C^0\ \text{同伦}).$$

根据引理 1.3，可以断定 $d_2(f_1,y)=d_2(f_2,y)$．

(II) 设 $f\sim g$，并设 $f_1, g_1\in C^\infty(M,N)$ 适合条件

$$f_1\sim f,\ f_1\pitchfork y;\quad g_1\sim g,\ g_1\pitchfork y.$$

则有

$$f_1\pitchfork y,\quad g_1\pitchfork y,\quad f_1\sim g_1\ (C^0\ \text{同伦}).$$

于是，根据引理 1.3，$d_2(f_1,y)=d_2(g_1,y)$．这就证明了

$$d_2(f,y)=d_2(g,y). \qquad □$$

1.7 命题 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，$\dim M=\dim N$，M 紧致，N 连通，并设 $f\in C^0(M,N)$．则 $\deg_2(f,y)$ 不随 $y\in N$ 而改变．即对所有的 $y\in N$，$\deg_2(f,y)$ 取相同的值．

证明 取 $f_1\in C^\infty(M,N)$，使得

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

按照定义，$d_2(f,y)=d_2(f_1,y)$．根据唱片引理，对 y 的某个邻域 V 中所有的 z 都有

$$f_1 \pitchfork z, \quad d_2(f_1, z) = d_2(f_1, y).$$

这就证明了 $d_2(f, \cdot): N \to \{0,1\}$ 是局部常值函数．因而以下两个集合都是 N 中的开集

$$\Omega_0 = \{y \in N \mid d_2(f, y) = 0\}, \quad \Omega_1 = \{y \in N \mid d_2(f, y) = 1\}.$$

显然有

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 = \varnothing, \quad \Omega_0 \cup \Omega_1 = N.$$

由于 N 的连通性，这两个开集之一是空集，另一个就是整个 N. 因而 $d_2(f, y)$ 对所有的 $y \in N$ 取相同的值． □

1.8 定义 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$\dim M = \dim N$，$f \in C^0(M, N)$．如果 $\deg_2(f, y)$ 不随 $y \in N$ 而改变(例如 N 是连通光滑流形的情形)，那么我们就把

$$\deg_2(f) := \deg_2(f, y)$$

叫做映射 f 的模 2 映射度．

1.9 命题 在定义 1.8 所述的条件下，如果 $f: M \to N$ 不是满映射，那么 $\deg_2(f) = 0$．换言之，如果 $\deg_2(f) \neq 0$，那么 f 必定是满映射．

证明 设 $f: M \to N$ 不是满映射，则存在 $y \in N \setminus f(M)$．我们取 $f_1 \in C^\infty(M, N)$，$f_1 \sim f$，并且 f_1 在 C^0 意义下充分接近于 f，使得 $y \notin f_1(M)$．于是有

$$\deg_2(f) = \deg_2(f_1, y) = \# f_1^{-1}(y) = 0. \qquad \square$$

1.10 命题 设 M, N 和 P 是 C^∞ 流形，M 和 N 紧致，N 和 P 连通，并且 $\dim M = \dim N = \dim P$.

(Ⅰ) 如果 $\varphi \in C^0(M, N)$，$\psi \in C^0(N, P)$，那么

$$\deg_2(\psi \circ \varphi) = \deg_2(\psi) \cdot \deg_2(\varphi).$$

(Ⅱ) 如果 $\mathrm{id}: M \to M$ 是恒同映射，那么

$$\deg_2(\mathrm{id}) = 1.$$

(Ⅲ) 如果 $\varphi: M \to N$ 是同胚映射，ψ 是其逆映射，那么

$$\deg_2(\varphi) = \deg_2(\psi) = 1.$$

证明 论断(Ⅱ)显然成立，因为每个 $y \in M$ 都是 id 的正则值，

并且原像只有一点．论断(Ⅲ)是(Ⅰ)和(Ⅱ)共同的推论．因此，只有论断(Ⅰ)尚须证明．

我们来证明论断(Ⅰ)．不妨设 φ 和 ψ 都是 C^∞ 映射．取 z 为 $\psi\circ\varphi$ 和 ψ 共同的正则值．可设 $\psi^{-1}(z)=\{y_1,\cdots,y_\beta\}$，其中每个 y_i 都是 φ 的正则值．又可设

$$\varphi^{-1}(y_i)=\{x_{(i,1)},\cdots,x_{(i,\alpha_i)}\},\quad i=1,\cdots,\beta.$$

于是

$$(\psi\circ\varphi)^{-1}(z)=\bigcup_{i=1}^{\beta}\{x_{(i,1)},\cdots,x_{(i,\alpha_i)}\}.$$

根据定义

$$\begin{aligned}\deg_2(\psi)&=\#\psi^{-1}(z)=\beta\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ \deg_2(\varphi)&=\#\varphi^{-1}(y_i)=\alpha_i\ \ (\mathrm{mod}\ 2),\\ \deg_2(\psi\circ\varphi)&=\#((\psi\circ\varphi)^{-1}(z))\,(\mathrm{mod}\ 2)\\ &=\sum_{i=1}^{\beta}\alpha_i\,(\mathrm{mod}\ 2)=\beta\deg_2(\varphi)\,(\mathrm{mod}\ 2)\\ &=\deg_2(\psi)\cdot\deg_2(\varphi).\qquad\square\end{aligned}$$

利用模 2 映射度，我们给出 Brouwer 不动点定理的另一证明．

1.11 定理(Brouwer 不动点定理) 连续映射 $f:D^n\to D^n$ 必有不动点．

证明 仿照第七章§2 中的讨论，可将问题归结到证明这样的事实：任何连续映射 $g:D^n\to S^{n-1}$ 都不能使

$$(g|S^{n-1})=\mathrm{id}:S^{n-1}\to S^{n-1}.$$

我们用反证法证明这一事实．假设存在满足上述条件的连续映射 g，则由命题 1.10 的(Ⅱ)可知

$$\deg_2(g|S^{n-1})=1. \tag{1.1}$$

另一方面，因为

$$H(t,x)=g((1-t)x)$$

将 $g|S^{n-1}$ 同伦于常值映射 $g(0)$，所以

$$\deg_2(g|S^{n-1})=0. \tag{1.2}$$

我们得到互相矛盾的结果(1.1)和(1.2). □

§2 模 2 环绕数

一般约定 在本节中,设 M 是紧致无边 C^∞ 流形, $\dim M=n$. 我们约定记

$$D_\varepsilon=D_\varepsilon^{n+1}=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|\leqslant\varepsilon\},$$
$$S_\varepsilon=S_\varepsilon^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=\varepsilon\}.$$

但对 S_1^n, 仍同以前一样采用标准的记号 S^n, 即约定

$$S^n:=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=1\}.$$

2.1 定义 设 M 是紧致的无边 C^∞ 流形, 并且 $\dim M=n$, $f\in C^0(M,\mathbb{R}^{n+1})$, 并且设 $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus f(M)$. 考察这样一个映射:

$$(2.1)\qquad \begin{cases}\theta: M\to S^n,\\ x\mapsto \dfrac{f(x)-z}{\|f(x)-z\|}.\end{cases}$$

我们定义

$$W_2(f,z):=\deg_2(\theta),$$

并称 $W_2(f,z)$ 为 f 对 z 的**模 2 环绕数**.

2.2 引理 设 M 是紧致的无边 C^∞ 流形, 并且 $\dim M=n$, $f\in C^\infty(M,\mathbb{R}^{n+1})$, 并且设 $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus f(M)$. 如果存在紧致带边的 C^∞ 流形 X 和 C^∞ 映射 $F: X\to\mathbb{R}^{n+1}$, 使得

$$\partial X=M,\quad \partial F=F|M=f,\quad z\notin F(X),$$

那么

$$W_2(f,z)=0.$$

证明 在引理的条件下, 如(2.1)那样定义的 θ 是光滑映射, 并可扩充为光滑映射

$$\begin{cases}\Theta: X\to S^n,\\ x\mapsto \dfrac{F(x)-z}{\|F(x)-z\|}.\end{cases}$$

因为 $\partial\Theta=\Theta|M=\theta$, 所以(根据引理 1.2)

$$W_2(f,z)=\deg_2(\theta)=0. \qquad \square$$

2.3 引理 设$f_i\in C^0(M,\mathbb{R}^{n+1})(i=0,1)$并且$H: f_0\sim f_1$是$C^0$同伦．如果$z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus H(I\times M)$,那么

$$W_2(f_0,z)=W_2(f_1,z).$$

证明 对$i=0,1$,我们定义映射

$$\begin{cases}\theta_i: M\to S^n,\\ \qquad x\mapsto \dfrac{f_i(x)-z}{\|f_i(x)-z\|}.\end{cases}$$

然后考察从θ_0到θ_1的同伦

$$\begin{cases}\Theta: I\times M\to S^n,\\ \qquad (t,x)\mapsto \dfrac{H(t,x)-z}{\|H(t,x)-z\|}.\end{cases}$$

根据引理 1.3,应该有

$$W_2(f_0,z)=\deg_2(\theta_0)=\deg_2(\theta_1)=W_2(f_1,z). \qquad \square$$

2.4 引理 设U和V都是$\mathbb{R}^{n+1}$中含有 0 点的开集，$F: U\to V$是微分同胚，$F(0)=0$. 则只要$\varepsilon>0$足够小,就必定有

$$W_2(F|S_\varepsilon,0)=1,$$

这里
$$S_\varepsilon=S_\varepsilon^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=\varepsilon\}.$$

证明 记$A=\mathrm{D}F(0)$, 则A是非退化线性映射．可设

$$\inf\{\|A\xi\|\mid \xi\in\mathbb{R}^{n+1},\|\xi\|=1\}=\sigma>0.$$

容易看到

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|,\quad \forall x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}.$$

取$\varepsilon>0$充分小,使得只要$0<\|x\|\leqslant\varepsilon$,就有$\|F(x)-Ax\|<\sigma\|x\|$．于是,对于$x\in S_\varepsilon$和$t\in[0,1]$,应有

$$Ax+t(F(x)-Ax)\neq 0.$$

因而可定义

$$H(t,x)=\frac{Ax+t(F(x)-Ax)}{\|Ax+t(F(x)-Ax)\|}.$$

这样定义的 $H: I\times S_\varepsilon \to S^n$ 是从映射 $\frac{Ax}{\|Ax\|}$ 到映射 $\frac{F(x)}{\|F(x)\|}$ 的同伦：

$$H(0,x)=\frac{Ax}{\|Ax\|},\quad H(1,x)=\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

因而这两个映射的映射度应相等，即

$$W_2(F|S_\varepsilon,0)=W_2(A|S_\varepsilon,0).$$

我们来考察(这里采取一目了然但却不那么正式的写法)映射

$$\frac{Ax}{\|Ax\|}: S_\varepsilon^n\to S^n. \tag{2.2}$$

容易看出，(2.2)的逆映射是

$$\varepsilon\frac{A^{-1}\xi}{\|A^{-1}\xi\|}: S^n\to S_\varepsilon^n. \tag{2.3}$$

因此，由(2.2)定义的映射是一个同胚．根据命题 1.10 的(iii)，可以断定该映射的模 2 映射度等于 1．由此得知

$$W_2(F|S_\varepsilon,0)=W_2(A|S_\varepsilon,0)=1. \qquad \square$$

2.5 说明 设 M 是紧致带边的 C^∞ 流形，N 是无边的 C^∞ 流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^\infty(M,N)$．如果 $y\in N\setminus f(\partial M)$ 是 f 的正则值，那么原像集 $f^{-1}(y)$ 是包含在 $M\setminus\partial M$ 之中的紧致 0 维流形．"唱片引理"的全部结论适用于这一情形．因而仍可定义

$$\deg_2(f,y):=\# f^{-1}(y)\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

在以下的讨论中将会用到这一说明．

2.6 定理 设 X 是紧致带边光滑流形，$\dim X=n+1$，$F\in C^\infty(X,\mathbb{R}^{n+1})$．如果 $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus F(\partial X)$ 是 F 的正则值，那么

$$W_2(\partial F,z)=\deg_2(F,z).$$

证明 为书写简便，不妨设 $z=0$(于是 $z=0$ 是 F 的正则值)．根据"唱片引理"，存在 0 点的开邻域 V，使得 $F^{-1}(V)$ 是不相交的开集之并：

$$F^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

并且使得 $F|U_i: U_i \to V$ 是光滑同胚$(i=1,\cdots,k)$．不妨设

$$F^{-1}(0)=\{x_1,\cdots,x_k\},$$

其中 $x_i\in U_i(i=1,\cdots,k)$．我们约定用记号"$\approx$"表示"光滑同胚于"．根据引理 2.4, 可取环绕 x_i 的足够小的闭邻域 $D_i\subset U_i$, $D_i\approx D_\varepsilon^{n+1}$, 其边缘 $C_i\approx S_\varepsilon^n$ 使得

$$W_2(F|C_i,0)=1,\quad i=1,\cdots,k. \tag{2.4}$$

考察带边流形

$$Y=X\Big\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{k}\operatorname{int}D_i\right).$$

Y 的边缘为

$$\partial Y=\partial X\cup\bigcup_{i=1}^{k}\partial D_i. \tag{2.5}$$

因为 $F(Y)\subset\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$, 所以(根据引理 2.2)

$$W_2(F|\partial Y,0)=0. \tag{2.6}$$

在下面的讨论中,所进行的相加或连加运算都是模 2 意义下的加法运算．这种加法规定:

$$0+0=1+1=0,\quad 0+1=1+0=1.$$

根据(2.5),我们可以将(2.6)写成

$$W_2(F|\partial X,0)+\sum_{i=1}^{k}W_2(F|C_i,0)=0.$$

据此,并引用(2.4),就得到

$$\begin{aligned}W_2(F|\partial X,0)&=\sum_{i=1}^{k}W_2(F|C_i,0)\\&=k \pmod 2\\&=\# F^{-1}(0) \pmod 2\\&=\deg_2(F,0).\qquad\square\end{aligned}$$

附注　上面的定理使我们可以依据 F 沿边界 ∂X 对 z 的环绕情形计算 F 在 X 中对 z 的模 2 覆盖层数．可以想见,这定理将是很有用的．通过考察映射沿边界的性态,了解映射在区域内部的

情况，这样的做法在数学的各分支中屡见不鲜．

§3　Borsuk-Ulam 定理

3.1　定义　（Ⅰ）集合 $D\subset\mathbb{R}^s$ 被称为对称子集，倘若 $D=-D$，也就是

$$x\in D\Longleftrightarrow -x\in D.$$

（Ⅱ）设 D 是 $\mathbb{R}^s$ 中的对称子集，E 是 $\mathbb{R}^t$ 中的对称子集．映射 $f:D\longrightarrow E$ 被称为奇映射，倘若

$$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in D.$$

著名的 Borsuk-Ulam 定理断定：如果 $f:S^n\longrightarrow S^n$ 是连续的奇映射，那么

$$\deg_2(f)=1.$$

换句话说，任何连续奇映射 $f:S^n\longrightarrow S^n$ 的覆盖层数都必定是奇数．

为了证明这一定理，先作一些准备．

3.2　引理　对于任何奇映射 $f\in C^0(S^n,S^n)$，存在奇映射 $\tilde{f}\in C^\infty(S^n,S^n)$，使得 $\tilde{f}\sim f$.

证明　首先取逼近 $f:S^n\longrightarrow S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 的光滑映射 $f_0:S^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$，使得

$$\|f_0(x)-f(x)\|<\varepsilon<1/2,\quad \forall x\in S^n.$$

于是也有

$$\|f_0(-x)-f(-x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in S^n.$$

然后取

$$f_1(x)=\frac{f_0(x)-f_0(-x)}{2}.$$

则 $f_1:S^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+1}$ 是光滑的奇映射，并且

$$\|f_1(x)-f(x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in S^n.$$

然后再取

$$\tilde{f}(x)=\frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|},\quad x\in S^n;$$

$$H(t,x)=\frac{f(x)+t(f_1(x)-f(x))}{\|f(x)+t(f_1(x)-f(x))\|},\quad (t,x)\in I\times S^n.$$

容易看出：$\tilde{f}:S^n\to S^n$ 是光滑的奇映射，并且 $H:I\times S^n\to S^n$ 将 f 同伦于 $\tilde{f}$. □

3.3 关于0维流形的若干说明 我们将从0维情形出发，采用归纳法证明 Borsuk-Ulam 定理. 为此，先要对0维流形作若干说明和约定.

按照定义，0维流形由一些离散的点组成（即为赋有离散拓扑的点集）. 设 M 是0维流形或是任意维的光滑流形，N 是0维流形. 对此情形，任何映射

$$f:M\to N$$

都被认为是任意次连续可微的（即光滑的），任何一个 $y\in N$ 都被认为是 f 的正则值. 因而，对于 M 是紧致0维流形，N 是0维流形，$y\in N$ 这样的情形，仍然可以定义

$$\deg_2(f,y)=\#f^{-1}(y)\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

若 N 是连通的0维流形，则 $N=\{y\}$ 由单个点组成. 对此当然可以定义

$$\deg_2(f)=\deg_2(f,y).$$

但这情形似乎过于平凡. 下面的（Ⅰ）和（Ⅱ）将稍作推广.

（Ⅰ）考察0维球面

$$S^0:=\{-1,1\}.$$

如果 $f:S^0\to S^0$ 是单映射，那么

$$\#f^{-1}(-1)=\#f^{-1}(1)=1.$$

对此情形，我们定义

$$\deg_2(f)=1.$$

如果 $f:S^0\to S^0$ 不是单映射，那么 $f^{-1}(-1)$ 与 $f^{-1}(1)$ 二者之一

是二元集合，另一是空集合，因而

$$\#f^{-1}(-1)=\#f^{-1}(1)=0 \pmod 2.$$

对此情形，我们定义

$$\deg_2(f)=0.$$

(Ⅱ) 还可以对(Ⅰ)中的约定作进一步的扩充．考察这样的情形：M 和 N 都是 0 维流形，其中 M 由偶数个点组成，而 $N=\{y_-,y_+\}$ 由两个点组成．对于任意的映射 $f: M\to N$，显然有

$$f^{-1}(y_-)\cup f^{-1}(y_+)=M,$$

因而

$$\#f^{-1}(y_-)+\#f^{-1}(y_+)=0 \pmod 2.$$

对此情形，我们定义

$$\deg_2(f)=\#f^{-1}(y_-)=\#f^{-1}(y_+) \pmod 2.$$

(Ⅲ) 对(Ⅱ)中所述的情形定义了模 2 映射度之后，可以进一步讨论相应的模 2 环绕数．设 M 是由偶数个点组成的 0 维流形．考察连续映射 $f: M\to \mathbb{R}\setminus\{z\}$．我们构造这样一个映射

$$\theta: M\to S^0,$$

$$x\mapsto \frac{x-z}{|x-z|},$$

并定义

$$W_2(f,z)=\deg_2(\theta).$$

(Ⅳ) 在作了上述这些约定之后，可以断定：上节的引理 2.2，引理 2.4 和定理 2.6 对于 $n=0$ 的情形仍然成立(请读者自行验证)．

3.4 引理 对于 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，以下的两个论断 $(\mathrm{BU})_n$ 和 $(\mathrm{BU})_n'$ 相互等价．

$(\mathrm{BU})_n$ 对任何奇映射 $f\in C^\infty(S^n,S^n)$ 有

$$\deg_2(f)=1.$$

$(\mathrm{BU})_n'$ 对任何奇映射 $g\in C^\infty(S^n,\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0)$ 有

$$W_2(g,0)=1.$$

证明 先证“$(\mathrm{BU})_n\Longrightarrow(\mathrm{BU})_n'$”．对于任意给定的光滑奇

映射 $g: S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus 0$, 我们记

$$f(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

则 $f: S^n \to S^n$ 仍是光滑的奇映射．假定 $(\mathrm{BU})_n$ 成立，就得到

$$W_2(g, 0) = \deg_2(f) = 1.$$

再来证明“$(\mathrm{BU})_n' \Longrightarrow (\mathrm{BU})_n$”．任意光滑的奇映射 $f: S^n \to S^n$ 可以看成从 S^n 到 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0$ 的光滑奇映射：

$$f: S^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}\setminus 0.$$

假定 $(\mathrm{BU})_n'$ 成立，就得到

$$\deg_2(f) = W_2(f, 0) = 1. \qquad \square$$

3.5 定理 (Borsuk-Ulam) 如果 $f: S^n \to S^n$ 是连续奇映射，那么

$$\deg_2(f) = 1.$$

证明 根据引理 3.2, 只须对光滑的奇映射 $f: S^n \to S^n$ 证明定理的结论．根据引理 3.4, 只须证明等价的两个论断 $(\mathrm{BU})_n$ 和 $(\mathrm{BU})_n'$ 之一成立．我们将用归纳法完成这一证明．

首先考察 $S^0 = \{-1, 1\}$．容易看到，任何奇映射 $f_0: S^0 \to S^0$ 都是同胚，因而 $\deg_2(f_0) = 1$．这证明了 $(\mathrm{BU})_0$ 和 $(\mathrm{BU})_0'$ 成立．

现在假设 $(\mathrm{BU})_n'$ 成立，往证 $(\mathrm{BU})_{n+1}$ 成立．考察任意的光滑奇映射 $f: S^{n+1} \to S^{n+1}$．我们把 S^n 看作 S^{n+1} 的“赤道”，于是 $S^n \subset S^{n+1}$．因为 $E = f(S^n) \cup f(C(f))$ 是 S^{n+1} 中的零测集，所以必定存在

$$a \in S^{n+1}\setminus(E \cup (-E)).$$

我们记 $p_+ = a$, $p_- = -a$. 则 p_+ 和 p_- 都不在 $f(S^n)$ 上，并且 p_+ 和 p_- 都是 f 的正则值．设 Π 是 $\mathbb{R}^{n+2}$ 中垂直平分线段 $\overline{p_-p_+}$ 的 $n+1$ 维子空间，$\pi: \mathbb{R}^{n+2} \to \Pi$ 是从 $\mathbb{R}^{n+2}$ 到 Π 的垂直投影．因为 $\mathbb{R}^{n+2}$ 的正交变换显然是 C^∞ 同胚，所以不妨设 Π 就是子空间 $\mathbb{R}^{n+1}\times 0 \approx \mathbb{R}^{n+1}$．考察

$$g = \pi \circ f: S^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

显然 g 仍是光滑的奇映射，并且

$$g(S^n)\subset\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0.$$

球面 S^{n+1} 是以"赤道"S^n 为公共边界的两个半球面(带边流形)S_+^{n+1} 和 S_-^{n+1} 的并集．利用 f 的奇映射性质并引用归纳假设，我们可以按照下面的办法算出 f 的模 2 映射度(所涉及的相加运算都是模 2 加法)：

$$\begin{aligned}\deg_2(f)=\deg_2(f,p_+)&=\deg_2(f|S_+^{n+1},p_+)+\deg_2(f|S_-^{n+1},p_+)\\&=\deg_2(f|S_+^{n+1},p_+)+\deg_2(f|S_+^{n+1},p_-)\\&=\deg_2(g|S_+^{n+1},0)=W_2(g|S^n,0)=1.\end{aligned}$$ □

练　习　H

H.1. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$ 适合条件 $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in S^n$, 试证

$$\deg_2(f)=0.$$

H.2. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$．试证：

(a) (Hirsch)如果 $\deg_2(f)=1$, 那么存在 $x_0\in S^n$, 使得

$$f(-x_0)=-f(x_0);$$

(b) (Borsuk) 如果 $\deg_2(f)=0$, 那么存在 $x_0\in S^n$, 使得

$$f(-x_0)=f(x_0).$$

H.3. 设 $F\in C^0(D^n,\mathbb{R}^n)$ 适合条件 $F(-x)=-F(x)$, $\forall x\in\partial D^n$. 试证 F 必有不动点．

H.4. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$ 适合条件 $\deg_2(f)=0$. 试证存在 $x_0,y_0\in S^n$, 使得 $f(x_0)=x_0$, $f(y_0)=-y_0$.

H.5. 设 $n>k\geqslant 1$. 则不存在从 S^n 到 S^k 的连续奇映射．

H.6. 设 $f\in C^0(S^n,\mathbb{R}^n)$ 是奇映射，则存在 $x_0\in S^n$, 使得

$$f(x_0)=0.$$

H.7. 设 $f\in C^0(S^n,\mathbb{R}^n)$, 试证存在 $x_0\in S^n$, 使得 $f(-x_0)=f(x_0)$.

H.8. (维数的不变性)设 $m>n$. 则 $\mathbb{R}^m$ 与 $\mathbb{R}^n$ 不可能同胚．

H.9. (Lusternik-Schnirelmann) 设 $n+1$ 个闭集 $F_0,\cdots,F_n$ 覆盖了 S^n, 则至少有其中的某个闭集包含有一双对径点．

H.10. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$ 适合条件 $f(-x)\neq f(x)$, $\forall x\in S^n$. 试

证 f 是满映射.

H.11. "区域不变性定理": 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f\in C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 是局部单一映射, 则 f 是一个开映射.

借助于 Borsuk-Ulam 定理, 循以下线索可以作出"区域不变性定理"的一个证明.

(a) 设 $D=D^n_\varepsilon$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 0 为中心, ε 为半径的闭球体, $g\in C^0(D,\mathbb{R}^n)$ 是单一映射, $g(0)=0$. 约定记

$$G(t,x)=g\left(\frac{x}{1+t}\right)-g\left(-\frac{tx}{1+t}\right),\quad (t,x)\in[0,1]\times D.$$

则有

$$G([0,1]\times\partial D)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.$$

(b) 假设条件与记号如(a)中所述, 并约定记 $g_1(\cdot)=G(1,\cdot)$, 则有

$$W_2(g,\partial D,0)=W_2(g_1,\partial D,0)=1.$$

因为 $0\notin g(\partial D)$, 可设 $d(0,g(\partial D))=2\eta>0$. 于是, 对于任何一个 $y\in D^n_\eta$ 都必定有

$$W_2(g,\partial D,y)=W_2(g,\partial D,0)=1.$$

据此证明: $g(D)\supset D^n_\eta$.

(c) "区域不变性定理". 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f\in C^0(\Omega,\mathbb{R}^n)$ 是局部单一映射. 如果 $x_0\in\Omega$, $f(x_0)=y_0$, 那么存在 x_0 的开邻域 $U\subset\Omega$, 使得 $f(U)$ 包含 y_0 的一个开邻域 V.

H.12. 设 $f\in C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 是局部单一映射, 适合条件

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|=\infty.$$

试证 $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

第九章　定向映射度与Hopf定理

§1　可定向流形

1.1 定义　设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$f\in C^r(U,\mathbb{R}^m)(r\geqslant 1)$. 如果

$$\det(Df(x))>0,\quad \forall x\in U,$$

那么我们就称 f 为保持定向的 C^r 映射.

1.2 定义　(Ⅰ) 设 M 是 C^r 流形 $(r\geqslant 1)$，$\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 M 的 C^r 图汇. 如果对于任何使得 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 的 α 和 $\beta(\in\Lambda)$，局部坐标变换

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\subset\mathbb{R}^m$$

都是保持定向的 C^r 映射，那么我们就称 $\{(U_\lambda,\varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 M 的定向 C^r 图汇. M 的两个定向 C^r 图汇被称为是定向相容的，倘若这两个图汇合并在一起仍组成一个定向 C^r 图汇.

(Ⅱ) 具有定向 C^r 图汇的流形 M 被称为可定向 C^r 流形. 选定一个定向 C^r 图汇就给定 M 一个定向. 彼此定向相容的 C^r 图汇决定相同的定向.

(Ⅲ) 设 M 是一个定向 C^r 流形，$\mathscr{A}$ 是决定 M 定向的 C^r 图汇，(U,φ) 是 M 的任意一个 C^r 图卡. 如果 $\mathscr{A}\cup\{(U,\varphi)\}$ 仍是 M 的定向 C^r 图汇，那么我们就把 (U,φ) 叫做 M 的一个正向 C^r 图卡.

(Ⅳ) 设 $\mathscr{A}$ 是决定 M 定向的一个 C^r 图汇. 如果将 $\mathscr{A}$ 中所有图卡的第一个坐标(或最后一个坐标)统统改变符号，那么仍能得到一个定向 C^r 图汇. 这样得到的图汇所决定的定向被称为是原定向的相反定向.

带边流形的定向以及该定向在边缘流形上的诱导定向，对

以下的讨论将起非常重要的作用. 这里,我们需要适当扩充带边流形图卡的定义,然后对带边流形的定向作较详细的说明. 首先约定记

$$\mathbb{R}_+^{1+n} := \{(u^0, u^1, \cdots, u^n) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid u^0 \geqslant 0\},$$
$$\mathbb{R}_-^{1+n} := \{(u^0, u^1, \cdots, u^n) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid u^0 \leqslant 0\}.$$

1.3 定义 设 X 是满足第二可数公理的 Hausdorff 拓扑空间.

(Ⅰ) 以下情形(1)或(2)所叙述的 (U, φ) 都被称为是 X 的图卡:

(1) U 是 X 中的开集, $\varphi: U \to \mathbb{R}_+^{1+n}$ 是从 U 到 $\mathbb{R}_+^{1+n}$ 中开集的同胚. 这样的 (U, φ) 被称做 X 的"$\mathbb{R}_+^{1+n}$型"图卡.

(2) U 是 X 中的开集, $\varphi: U \to \mathbb{R}_-^{1+n}$ 是从 U 到 $\mathbb{R}_-^{1+n}$ 中开集的同胚. 这样的 (U, φ) 被称做 X 的"$\mathbb{R}_-^{1+n}$型"图卡.

(Ⅱ) 设 $r \geqslant 1$. X 的两个图卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 被称为是 C^r 相容的(定向 C^r 相容的), 倘若有以下两种情形之一成立:

(i) 或者 $U \cap V = \varnothing$,

(ii) 或者 $U \cap V \neq \varnothing$, 并且坐标变换

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

和

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

都是 C^r 映射(保持定向的 C^r 映射).

(Ⅲ) X 的一族图卡 $\mathscr{A} = \{(U, \varphi)\}$ 被称为是 X 的 C^r 图汇(定向 C^r 图汇), 倘若

(a) $\mathscr{A}$ 中各图卡的定义域覆盖了 X,

(b) $\mathscr{A}$ 中任意两个图卡都是 C^r 相容的(定向 C^r 相容的).

(Ⅳ) 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 X 的两个 C^r 图汇(定向 C^r 图汇). 若 $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ 仍是 X 的 C^r 图汇(定向 C^r 图汇), 则称 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 C^r 相容的(定向 C^r 相容的).

(Ⅴ) X 连同一个给定的 C^r 图汇 $\mathscr{A}$ 被称为一个 C^r 流形. 设 X 是 C^r 流形, $\mathscr{A}$ 是给定其 C^r 结构的图汇, $x \in X$. 如果存在与 $\mathscr{A}$ 中

各图卡 C^r 相容的图卡 (U, φ)，使得 $\varphi(x) \in 0 \times \mathbb{R}^n$，那么我们就称 x 为 X 的边缘点．X 的全体边缘点的集合记为 ∂X.

(Ⅵ) X 连同一个给定的定向 C^r 图汇 $\mathscr{A}$ 被称为一个定向 C^r 流形．$\mathscr{A}$ 赋予 X 确定的定向．彼此定向相容的 C^r 图汇给出相同的定向．

(Ⅶ) 设 X 是一个定向 C^r 流形，$\mathscr{A}$ 是确定 X 定向的 C^r 图汇，(U, φ) 是 X 的任意一个图卡．如果 (U, φ) 与 $\mathscr{A}$ 中所有的图卡定向 C^r 相容，那么我们就称 (U, φ) 为 X 的正向 C^r 图卡，并称 φ 为 X 的正向局部坐标．

附记 只要不涉及定向，"$\mathbb{R}_+^{1+n}$ 型"图卡与"$\mathbb{R}_-^{1+n}$ 型"图卡几乎没有差别．表面上看来似乎并无必要扩充带边流形图卡的定义．但是，对于涉及定向的讨论，引入两种类型的图卡就有其必要性．——即使对 $[0, 1]$ 区间这样简单的带边流形，也无法仅仅用"$\mathbb{R}_+^1$ 型"局部坐标图卡赋予它定向．

1.4 命题 1 维微分流形可定向．

证明 不妨设所给的 1 维微分流形是连通的．根据第七章的引理 1.4，存在覆盖这流形的参数表示．参数增加的方向就决定了流形的一个定向． □

1.5 命题 设 X 是 $1+n$ 维定向带边微分流形 $(n \geqslant 1)$．则 X 的正向"$\mathbb{R}_+^{1+n}$ 型"局部坐标系（正向"$\mathbb{R}_-^{1+n}$ 型"局部坐标系）在边缘 ∂X 的连通分支上诱导出确定的"内向型"定向（"外向型"定向）．

证明 设 $p \in \partial X$．对于 X 在 p 点邻近的任意两个正向"$\mathbb{R}_+^{1+n}$ 型"局部坐标系 $(u^0, u^1, \cdots, u^n)$ 和 $(v^0, v^1, \cdots, v^n)$，必有

$$\frac{\partial(v^0, v^1, \cdots, v^n)}{\partial(u^0, u^1, \cdots, u^n)} > 0. \tag{1.1}$$

因为在边缘点处有 $\dfrac{\partial v^0}{\partial u^0} \geqslant 0$，并且 (1.1) 式可以表示成

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v^0}{\partial u^0} & 0 & & \\ & \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial v^1}{\partial u^n} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \frac{\partial v^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial v^n}{\partial u^n} \end{vmatrix} > 0,$$

所以在各边缘点处必有

$$\frac{\partial(v^1, \cdots, v^n)}{\partial(u^1, \cdots, u^n)} > 0.$$

于是，X 的正向"$\mathbb{R}_-^{1+n}$ 型"局部坐标系的后 n 个坐标赋予 ∂X 的连通分支确定的定向．我们称这定向为"内向型"诱导定向．

再考察 X 在边缘点处的正向"$\mathbb{R}_-^{1+n}$ 型"局部坐标系．这种正向局部坐标系的后 n 个坐标也赋予 ∂X 的连通分支确定的定向．这样的定向被称为"外向型"诱导定向． □

1.6 命题 设 $r \geq 1$，并设

(a) X 是 $1+n$ 维定向带边 C^r 流形，

(b) Y 是 n 维定向无边 C^r 流形，

(c) $F \in C^r(X, Y)$，$y \in F(X)$ 是 F 与 ∂F 共同的正则值，即

$$F \pitchfork y, \quad \partial F \pitchfork y,$$

(d) $Z = F^{-1}(y)$ 是 X 中的紧致集，

则存在 Y 在 y 点邻近的正向局部坐标图卡 (V, ψ) 和覆盖了 Z 的有限个 X 的正向局部坐标图卡 $\{(U, \varphi)\}$，其中 $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$，使得

(0) $\psi(y) = 0$，

(1) $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u^0, u^1, \cdots, u^n) = (u^1, \cdots, u^n)$，

(2) $\{(U \cap Z, \varphi^0|Z)\}$ 是 Z 的一个定向 C^r 图汇，

(3) $Z \cap \partial X$ 由偶数个点组成；恰好在其中半数个点处，由 $(\varphi^1,$

$\cdots, \varphi^n$)给出的 ∂X 的局部坐标系属“内向型”诱导定向；而在另外半数个点处，由 $(\varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于“外向型”诱导定向．（在 Z 的每个同胚于[0, 1]的连通分支的两端，由 $(\varphi^1, \cdots, \varphi^n)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于不同类型的诱导定向．）

证明 (0) 首先，选取 Y 在 y 点邻近的正向局部坐标图卡 (V,ψ)，要求满足条件 $\psi(y)=0$.

(1) 然后，我们选取有限个 X 的正向局部坐标图卡，使得相应的局部坐标域覆盖紧致集 $Z=F^{-1}(y)$，并且使得 F 的局部表示成为淹没的典范形式（从 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的投影）.

(2) 考察流形 X 在点 $z\in Z$ 邻近的任意两个满足(1)中要求的正向局部坐标系 $(u^0, u^1, \cdots, u^n)$ 和 $(w^0, u^1, \cdots, u^n)$．因为

$$\frac{\partial(w^0, u^1, \cdots, u^n)}{\partial(u^0, u^1, \cdots, u^n)}=\left|\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial w^0}{\partial u^0} & & * & \\ \hline & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right|>0,$$

所以

$$\frac{\partial w^0}{\partial u^0}>0.$$

可见，所选各坐标系的 φ^0 坐标给出 Z 的一个定向 C^r 图汇．

(3) Z 是紧致的 1 维微分流形．它的每个连通分支微分同胚于[0, 1]或者 S^1．因而 $\partial Z=Z\cap\partial X$ 由偶数个点组成．考察其中一个确定的[0, 1]型连通分支．我们可以选取 $t\in[0, 1]$ 作为该分支的参数．如果在参数 $t=0$ 处，依照(2)所述选取的 Z 的局部坐标的正向与参数 t 的增加方向一致，即 $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t}>0$，那么沿整条参数曲线

都有同样的情形．不妨设在 $t=0$ 处有 $\frac{du^0}{dt}>0$（相反的情形可类似地讨论）．则在参数曲线的“0”端点，由 $(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于“内向型”诱导定向；而在参数曲线的“1”端点，由（另一图卡的）$(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于“外向型”诱导定向． □

1.7 注记 命题 1.6 将在下一节的讨论中起关键作用．常遇到这样的情形：X 本身是紧致的．对这样的情形，条件(d)自然而然地成立．

对以后的应用而言，以下两事项特别值得我们留意（符号与假设条件同命题 1.6）．

(Ⅰ) 在点 $p\in Z\cap\partial X$ 邻近，对于所选的坐标系 $\varphi=(\varphi^0,\varphi^1,\cdots,\varphi^r)$，若记

$$\partial\varphi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^r)|\partial X,\quad f=\partial F=F|\partial X,\quad \widetilde{f}=\psi\circ f\circ(\partial\varphi)^{-1},$$

则有 $\widetilde{f}(u^1,\cdots,u^n)=(u^1,\cdots,u^n)$．因此，在 p 点计算 $\widetilde{f}$ 的 Jacobi 行列式得到 $J(\widetilde{f})=1$．

(Ⅱ) 以后的讨论中，∂X 的正向当然具体给定．在 $Z\cap\partial X$ 的各点处，虽然 φ 是 X 的正向局部坐标，由 $\partial\varphi$ 所确定的正向未必与 ∂X 的给定正向一致．可以确认的事实是：在 $Z\cap\partial X$ 的各点处，由 $\partial\varphi$ 所确定的正向是 $\varphi^0|Z$ 正向的“补定向”．因而，在 Z 的每一个 $[0,1]$ 型连通分支的两端，由 $\partial\varphi$ 所确定的正向分别属于“内向型”诱导定向和“外向型”诱导定向．

注意到这些关键事实，在以后的讨论中，无论 ∂X 的正向怎样指定，我们都能参照具体情况，作出正确的判断．

§2 定向映射度与定向环绕数

记号约定 我们用记号 sgn 表示这样一个实函数：

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x=0,\\ -1, & 若\ x<0.\end{cases}$$

设 M 和 N 是定向微分流形，$\dim M=\dim N$, $p\in M$, $q\in N$. 设 f 是从 p 点邻近到 q 点邻近的局部微分同胚，φ 和 ψ 分别是 M 在 p 点邻近的和 N 在 q 点邻近的正向局部坐标系，则

$$\operatorname{sgn}\det(\mathrm{D}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}))_{\varphi(p)}$$

不因正向局部坐标系 φ 与 ψ 的不同选取而改变，因而可以无歧义地定义

$$\operatorname{Sgn} f_{*,p}:=\operatorname{sgn}\det(\mathrm{D}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}))_{\varphi(p)}.$$

2.1 定义 设 M 和 N 是定向光滑流形，$\dim M=\dim N$, M 紧致，$f\in C^{\infty}(M,N)$. 对于 f 的正则值 y, 我们把

$$\sum_{p\in f^{-1}(y)}\operatorname{Sgn} f_{*,p} \tag{2.1}$$

叫做 f 对 y 的(定向)映射度，并把(2.1)记为 $\deg(f,y)$.

附注 根据"唱片引理"，对于 y 的某个开邻域中所有的 z 都有

$$f\pitchfork z,\quad \deg(f,z)=\deg(f,y).$$

因而 $\deg(f,y)$ 关于 $y\in N$ 是局部常值函数.

关于定向映射度性质的讨论，与模 2 映射度的相应讨论有很多相似之处. 但在这里，本章的命题 1.6 将起关键作用.

一般约定 在下面的讨论中，我们设 M 是定向的紧致光滑流形，N 是定向的光滑流形，并且 $\dim M=\dim N$.

2.2 引理 设 X 是定向的紧致光滑带边流形，$\partial X=M$ 的各连通分支赋有统一的诱导定向(或都是"内向型"的，或都是"外向型"的)，$F\in C^{\infty}(X,N)$, $f=\partial F=F|M$. 如果 y 是 F 与 ∂F 共同的正则值，那么

$$\deg(f,y)=0.$$

证明 可参照第八章引理 1.2 证明中的讨论并引用本章命题 1.6 和注记 1.7 作出本引理的证明(参看图 24). □

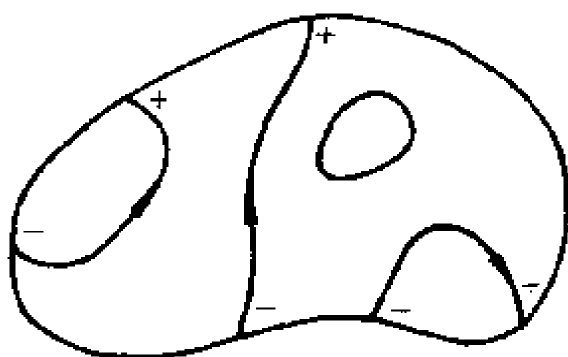


图 24

2.3 引理 设 M 是定向的紧致光滑流形，N 是定向光滑流形，$\dim M=\dim N$，$y\in N$，$f_i\in C^\infty(M,N)$ $(i=0,1)$，并且

$$f_0 \pitchfork y,\quad f_1 \pitchfork y.$$

如果 $f_0\sim f_1$（C^0 同伦），那么

$$\deg(f_0,y)=\deg(f_1,y).$$

证明 f_0 必定光滑同伦于 f_1. 根据横截扩张定理，存在光滑映射 $F: I\times M\to N$，使得

(i) $F(i,x)=f_i(x)$, $\forall x\in M$, $i=0,1$;

(ii) $F\pitchfork y$.

设 $J_0=[0,2/3)$，$J_1=(1/3,1]$，$\theta_0(t)=t$，$\theta_1(t)=t-1$. 则 $\{(J_0,\theta_0),(J_1,\theta_1)\}$ 是 $I=[0,1]$ 的定向 C^∞ 图汇，它赋予 I 确定的定向. 设 $\mathscr{A}$ 是给 M 定向的 C^∞ 图汇，我们记

$$\mathscr{D}=\{(J_i\times U,\theta_i\times\varphi)\mid(U,\varphi)\in\mathscr{A},\ i=0,1\}.$$

则 $\mathscr{D}$ 赋予 $I\times M$ 确定的定向（乘积定向）. $\mathscr{D}$ 中的图卡在 $0\times M$ 上诱导出"内向型"定向，在 $1\times M$ 上诱导出"外向型"定向. 对于 $i=0,1$，由 $j_i(p)=(i,p)$ 定义的映射 $j_i: M\to i\times M$ 是保持定向的 C^∞ 同胚. 若记 $F_i=F|(i\times M)$ $(i=0,1)$，则有

$$f_i=F_i\circ j_i,\quad i=0,1. \tag{2.2}$$

考察 $F^{-1}(y)$ 的这样一个连通分支：该连通分支微分同胚于 $[0,1]$ 并且两个端点 $(0,p)$ 和 $(1,q)$ 分属于 $0\times M$ 和 $1\times M$. 利用本章的命题 1.6，考察 F_0 在 $(0,p)$ 点和 F_1 在 $(1,q)$ 点的"符号"，容易

看到:

(2.3) $$\mathrm{Sgn}(F_0)_{*,(0,p)}=\mathrm{Sgn}(F_1)_{*,(1,q)}.$$

注意到 $j_i\,(i=0,1)$ 是保持定向的 C^∞ 同胚,由(2.2)和(2.3)又可得到

(2.4) $$\mathrm{Sgn}(f_0)_{*,p}=\mathrm{Sgn}(f_1)_{*,q}.$$

对 $F^{-1}(y)$ 的所有同胚于[0,1]并且两端分属于 $0\times M$ 和 $1\times M$ 的连通分支,将(2.4)这样的等式求和就得到

$$\deg(f_0,y)=\deg(f_1,y).$$

在上面的计算中,我们利用了这样的事实:如果 $F^{-1}(y)$ 的某个同胚于[0,1]的连通分支两端同属于 $0\times M$(或者同属于 $1\times M$),那么这两个端点对 $\deg(f_0,y)$ 和 $\deg(f_1,y)$ 的贡献都是0. □

2.4 说明 设 M 是定向的紧致带边光滑流形,N 是定向的无边光滑流形,$\dim M=\dim N$, $f: M\to N$ 是光滑映射. 如果 $y\in N\backslash f(\partial M)$ 是 f 的正则值,那么原像集 $f^{-1}(y)$ 是包含在 $M\backslash\partial M$ 中的紧致0维流形. "唱片引理"的全部结论适用于这一情形,因而仍可定义

$$\deg(f,y):=\sum_{p\in f^{-1}(y)}\mathrm{Sgn}\,f_{*,p}.$$

在以后的某些讨论中,我们将会利用这一说明.

2.5 定义 设 M 和 N 是定向的光滑流形(不带边),M 紧致,$\dim M=\dim N$, $f\in C^0(M,N)$, $y\in N$. 并设 $f_1\in C^\infty(M,N)$ 满足这样的条件

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

我们定义

$$\deg(f,y):=\deg(f_1,y).$$

2.6 命题 定义2.5确当无歧义,并且所定义的 $\deg(f,y)$ 关于 f 是同伦不变的.

2.7 命题 设 M 和 N 是定向的光滑流形,M 紧致,N 连通,$\dim M=\dim N$, $f\in C^0(M,N)$. 则 $\deg(f,y)$ 不随 $y\in N$ 而改变. 即对所有的 $y\in N$, $\deg(f,y)$ 取相同的值.

2.8 定义 设 M 是定向的紧致光滑流形，N 是定向的光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^0(M,N)$。如果 $\deg(f,y)$ 不随 $y\in N$ 而改变（例如 N 是连通流形的情形），那么我们就把

$$\deg(f):=\deg(f,y)$$

叫做 f 的映射度。

2.9 命题 在定义 2.8 所述的条件下，如果 $\deg(f)\neq 0$，那么 $f: M\to N$ 必定是满映射。

2.10 命题 设 M, N 和 P 是定向的光滑流形，M 和 N 紧致，N 和 P 连通，并且 $\dim M=\dim N=\dim P$。

（Ⅰ）如果 $\varphi\in C^0(M,N)$，$\psi\in C^0(N,P)$，那么

$$\deg(\psi\circ\varphi)=\deg(\psi)\cdot\deg(\varphi).$$

（Ⅱ）如果 $\mathrm{id}: M\to M$ 是恒同映射，那么

$$\deg(\mathrm{id})=1.$$

（Ⅲ）如果 $\varphi: M\to N$ 是同胚映射，ψ 是其逆映射，那么

$$\deg(\varphi)=\deg(\psi)=\pm 1.$$

2.11 定义 在命题 2.10 的（Ⅲ）中，如果 $\deg(\varphi)=1$，那么我们就称 φ 为保持定向的同胚。否则，我们就称 φ 为反转定向的同胚。

定向情形环绕数的定义可仿照模 2 情形写出，以下只作提要式的陈述。

2.12 定义 设 M 是定向的紧致无边光滑流形，$\dim M=n$，$f\in C^0(M,\mathbb{R}^{n+1})$，并且设 $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus f(M)$。则可定义连续映射

$$\begin{cases}\theta: M\to S^n,\\ x\mapsto \dfrac{f(x)-z}{\|f(x)-z\|}.\end{cases}$$

映射 f 对点 z 的环绕数定义为

$$W(f,z):=\deg(\theta).$$

我们约定：S^n 赋有"外法线"诱导定向。

2.13 引理 设 X 是定向的紧致光滑带边流形，$\dim X=n+1$。并设 $\partial X=M$ 的各连通分支赋有统一的诱导定向（或都是"内向

型"的，或都是"外向型"的）．如果

$$F\in C^0(X,\mathbb{R}^{n+1}),\quad f=\partial F=F|M,$$

那么对任何 $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus F(X)$ 都有 $W(f,z)=0$.

2.14 引理 设 M 是定向的紧致光滑无边流形，$\dim M=n$, f_0、$f_1\in C^0(M,\mathbb{R}^{n+1})$. 如果存在 C^0 同伦 $H: f_0\sim f_1$，那么对于任何 $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus H(I\times M)$ 都有 $W(f_0,z)=W(f_1,z)$.

2.15 引理 设 $A:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是非退化线性映射，则有

$$W(A|S_\rho,0)=\operatorname{sgn}(\det A).$$

这里

$$S_\rho=S_\rho^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=\rho\},$$

并且 S_ρ 赋有"外向型"诱导定向．

证明 设 $\beta\neq 0$，对于初等方阵

$$B=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \beta & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}(i),$$

我们将其主对角线上第 i 行的 β 换成

$$(1-s)\beta+s\,\frac{\beta}{|\beta|},$$

这样得到含参数 s 的方阵 $B(s)$．对于另一类型的初等方阵

$$C=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & \gamma & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (i)\\ \\ (j)\\ \\ \\ \end{matrix},$$

我们将其第 i 行第 j 列的 γ 换成 $(1-s)\gamma$，这样得到含参数 s 的方阵 $C(s)$.

将引理中所述的非退化线性变换 A 视为 $(n+1)\times(n+1)$ 方

阵．非退化方阵 A 可以经过初等变换化成恒同方阵，因而 A 可以表示成初等方阵的乘积：

$$A = A_1 A_2 \cdots A_l.$$

对每个初等方阵 $A_k(1 \leqslant k \leqslant l)$，视其类型分别按上面所述的办法引入含参数的方阵 $A_k(s)$，然后记

$$A(s) = A_1(s) A_2(s) \cdots A_l(s).$$

对每个 $s \in [0, 1]$，显然都有 $\det A(s) \neq 0$．我们还注意到：$A(0) = A$，而 $A(1)$ 是一个对角形方阵，其主对角线上的数都是 $+1$ 或者 -1，并且 $\det A(1) = \operatorname{sgn} \det A$．

再来考察非退化的含参数方阵

$$\begin{bmatrix} -\cos \pi s & -\sin \pi s \\ \sin \pi s & -\cos \pi s \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

让 s 从 0 变到 1，该参数方阵经历以下变化

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

回到我们上面的讨论．对于 $\det A > 0$ 的情形，可以通过 (2.5) 类型的参数过程，将 $A(1)$ 变化成单位方阵．对于 $\det A < 0$ 的情形，可以通过 (2.5) 类型的参数过程，将 $A(1)$ 变成这样一个对角形方阵，其主对角线上仅有单个 -1，其余的都是 $+1$．为引述方便，称这样的对角形方阵为"拟单位方阵"．

综上所述，存在同伦 H 将 A 变化成单位方阵或拟单位方阵那样的变换（视 $\det A$ 的符号而定）；并且在同伦过程中的每一时刻 t，对应于该时刻的 $H(t, \cdot)$ 都是非退化的线性变换，因而

$$H(I \times S_\rho^n) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0.$$

根据引理 2.14，我们得到结论：

$$W(A|S_\rho, 0) = \operatorname{sgn}(\det A). \qquad \square$$

2.16 引理 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集，$F: U \to V$ 是保持定向的（反转定向的）微分同胚，$0 \in U$，$0 \in V$，$F(0) = 0$．则对足够小的正数 ε，必有

$$W(F|S_\varepsilon, 0)=1 \quad (-1),$$

这里

$$S_\varepsilon = S_\varepsilon^n = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \varepsilon\},$$

并且 $S_\varepsilon^n = \partial D_\varepsilon^{n+1}$ 赋有"外向型"诱导定向.

2.17 定理 设 X 是定向的紧致光滑带边流形, $\dim X=n+1$, $\partial X=M$ 赋有"外向型"诱导定向, $F\in C^\infty(X, \mathbb{R}^{n+1})$, $z\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus F(M)$ 是 F 的正则值. 则有

$$W(\partial F, z)=\deg(F, z).$$

§3 Hopf 定理

Hopf 指出: 映射度完全决定了球面映射的同伦类. 他证明了这样一个定理: 如果两个连续映射 $f_0, f_1: S^n \to S^n$ 具有相同的映射度, 即 $\deg(f_0)=\deg(f_1)$, 那么这两个映射同伦: $f_0 \sim f_1$.

在本节中, 我们将证明推广的 Hopf 定理: 设 M 是紧致、连通、可定向的 n 维光滑流形, $f_i\in C^0(M, S^n)$ $(i=0, 1)$. 如果 $\deg(f_0)=\deg(f_1)$, 那么映射 f_0 与映射 f_1 同伦.

为了证明这个推广的 Hopf 定理, 我们从更特殊的情形开始, 首先去证明: 如果 $f\in C^0(S^n, S^n)$ 并且 $\deg(f)=0$, 那么 f 同伦于常值映射.

3.1 引理 设 X 是拓扑空间. 如果连续映射 $f, g: X \to S^n$ 满足条件

$$\|f(x)-g(x)\|<2, \quad \forall x\in X,$$

那么 f 与 g 同伦.

证明 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是对径点, 联结这两点的线段不经过原点, 所以可定义

$$H(t, x)=\frac{(1-t)f(x)+t\,g(x)}{\|(1-t)f(x)+t\,g(x)\|}, \quad \forall (t, x)\in[0, 1]\times X.$$

显然 H 使 f 同伦于 g. □

3.2 引理 设 K 是 S^n 的紧致子集，$a\in S^n\backslash K$. 并设 V 是以 $-a$ 为"极点"的这样一个"极圈"式邻域:

$$V:=\{x\in S^n \mid \|x-(-a)\|<1\}.$$

则存在光滑同胚 $h: S^n\to S^n$, 满足条件:

(i) $h(a)=a,\ h(-a)=-a$;

(ii) $h(K)\subset V$;

(iii) $h\sim \mathrm{id}$;

(iv) $h^{-1}\sim \mathrm{id}$.

证明 设 Π 是垂直平分 a 与 $-a$ 联线的超平面. 从 a 点出发向超平面 Π 作球极投影 ρ, 则 $\rho(-a)=0$. 因为 $\rho(K)=\widetilde{K}$ 是 Π 的紧致子集，并且 $\rho(V)=\widetilde{V}$ 是超平面 Π 上以 0 为中心的开圆盘(即开球体)，所以存在 $\lambda\in(0,1]$, 使得 $\lambda\widetilde{K}\subset\widetilde{V}$. 我们定义

$$h(x)=\begin{cases}\rho^{-1}(\lambda\rho(x)), & 若\ x\neq a,\\ a, & 若\ x=a;\end{cases}$$

$$H(t,x)=\begin{cases}\rho^{-1}((t+(1-t)\lambda)\rho(x)), & 若\ x\neq a,\\ a, & 若\ x=a.\end{cases}$$

则显然 $h: S^n\to S^n$ 是光滑同胚，并且容易验证

(i) $h(a)=a,\ h(-a)=-a$;

(ii) $h(K)\subset V$;

(iii) $H: h\sim \mathrm{id}$.

结论(iv)是结论(iii)的直接推论. 如果记

$$G(t,x)=H(1-t,h^{-1}(x)),$$

那么就有

$$G(0,x)=H(1,h^{-1}(x))=h^{-1}(x),$$
$$G(1,x)=H(0,h^{-1}(x))=h(h^{-1}(x))=x.$$

由此得知

(iv) $G: h^{-1}\sim \mathrm{id}$. □

记号约定 在下面引理 3.3 和引理 3.4 的讨论中，认为圆周 S^1 上已指定了正方向. 约定以 $[p,q]$ 表示 S^1 上沿正方向从 p 点到 q

点的一段闭弧，并约定以 (p,q) 表示相应的一段开弧.

3.3 引理 设 $[p,q]$ 是圆周 S^1 上沿指定正方向从 p 点到 q 点的一段闭弧. 如果 $\varphi\in C^0(S^1,S^1)$ 满足条件

(i) $\varphi(p)=\varphi(q)=a$,

(ii) $\varphi([p,q])\neq S^1$,

那么 φ 同伦于这样一个连续映射 ψ:

$$\psi(x)=\begin{cases}a, & \forall x\in[p,q],\\ \varphi(x), & \forall x\in S^1\setminus(p,q).\end{cases}$$

证明 取 $z\in S^1\setminus\varphi([p,q])$, 并设

$$h: S^1\setminus\{z\}\to \mathbf{R}$$

是以 z 为极点的 1 维球极映射. 对于 $t\in I$, $x\in[p,q]$, 我们定义

$$H(t,x)=h^{-1}((1-t)h(\varphi(x))+th(a));$$

而对于 $t\in I$, $x\in S^1\setminus(p,q)$, 则定义

$$H(t,x)=\varphi(x).$$

显然 $H: I\times S^1\to S^1$ 是连续映射，并且 H 使 φ 同伦于 ψ. □

3.4 引理 如果 $f\in C^0(S^1,S^1)$ 的映射度等于 0, 那么 f 同伦于常值映射.

证明 (必要时以同伦于 f 的光滑映射 f_0 代替 f) 不妨设 $f\in C^\infty(S^1,S^1)$. 设 $b\in S^1$ 是 f 的一个正则值. 因为

$$\deg(f,b)=0,$$

所以 $f^{-1}(b)$ 含有偶数个点(设为 $2k$ 个), 其中 k 个为"正型"点(f_* 在这些点处的"符号"是正的), 另外 k 个为"负型"点(f_* 在这些点处的"符号"是负的). 必有相邻的异型点. 不妨设 $p_0,q_0\in f^{-1}(b)$, p_0 是正型点, q_0 是负型点, 并且 (p_0,q_0) 中不含有 $f^{-1}(b)$ 的点.

根据"唱片引理", 存在包含 b 点的开弧 (b_-,b_+), 使得 $f^{-1}((b_-,b_+))$ 是 $2k$ 段两两不相交的开弧的并集, f 限制在每一段开弧上是到 (b_-,b_+) 的 C^∞ 同胚. 我们设 (p_-,p_+) 和 (q_-,q_+) 分别是含 p_0 和 q_0 的上述开弧. 因为 f 在 p_0 点邻近是顺向局部 C^∞ 同胚, 在 q_0 点邻近是逆向局部 C^∞ 同胚, 所以(参看图 25)

$$f([p_0, p_+)) = f((q_-, q_0]) = [b, b_+).$$

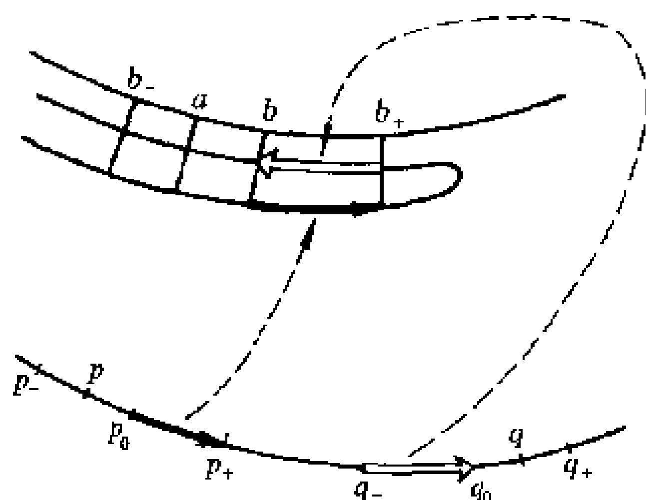


图 25

取 $a \in (b_-, b)$, 并设 $p \in (p_-, p_0)$ 和 $q \in (q_0, q_+)$ 使得 $f(p) = f(q) = a$. 则有

$$(b_-, a) \cap f([p, q]) = \varnothing.$$

根据引理 3.3, f 同伦于这样一个映射 f_1:

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \forall x \in [p, q], \\ f(x), & \forall x \in S^1 \setminus (p, q). \end{cases}$$

易见

$$(a, b_+) \cap f_1([p, q]) = \varnothing.$$

取 $b'_- = a$, $b'_+ = b_+$. 则 (b'_-, b'_+) 是含 b 的开弧. 原像集 $f_1^{-1}((b'_-, b'_+))$ 是 $2k-2$ 段两两不相交的开弧的并集, f_1 限制在每一段开弧上是到 (b'_-, b'_+) 的 C^∞ 同胚. 于是可继续施行类似于上面所述的操作. 总共经过 k 次操作之后, 可使

$$f \sim f_1 \sim \cdots \sim f_k,$$

其中的 f_k 不取 b 值. 根据引理 3.1, 可以断定 f_k 同伦于常值映射 $c(x) \equiv -b$. 综上所述, 我们证明了: f 同伦于常值映射 c. □

我们将对任意维的球面 S^n, 证明类似于引理 3.4 的结论. 为此, 先作一些准备.

3.5 引理 以下三条陈述相互等价:

$(\mathrm{HO})_n$ 若 $f\in C^0(S^n, S^n)$ 的映射度等于 0, 则 f 同伦于常值映射;

$(\mathrm{HO})_n'$ 若 $g\in C^0(S^n, \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$ 对 0 点的环绕数等于 0, 则 g 同伦于常值映射.

$(\mathrm{HO})_n''$ 若 $g\in C^0(S^n, \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$ 对 0 点的环绕数等于 0, 则 g 可以扩充为连续映射 $G: D^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$.

证明 将按以下程序进行:

$$(\mathrm{HO})_n \overset{(\mathrm{I})}{\Longrightarrow} (\mathrm{HO})_n' \overset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow} (\mathrm{HO})_n'' \overset{(\mathrm{III})}{\Longrightarrow} (\mathrm{HO})_n.$$

(I) 设连续映射 $g: S^n\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ 使得 $W(g, 0)=0$. 则连续映射

$$f(x)=\frac{g(x)}{\|g(x)\|}: S^n\to S^n$$

使得 $\deg(f)=0$. 根据 $(\mathrm{HO})_n$, f 同伦于常值映射 c. 因为 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的联线不通过原点:

$$(1-t)g(x)+tf(x)\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0, \quad \forall x\in S^n,$$

所以 g 与 f 同伦. 于是 $g\sim f\sim c$.

(II) 设连续映射 $g: S^n\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ 对 0 点的环绕数等于 0. 则根据 $(\mathrm{HO})_n'$, g 同伦于常值映射. 设连续映射 $H: I\times S^n\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ 使得

$$H(0, x)=g(x), \quad H(1, x)=c, \quad \forall x\in S^n.$$

对于 $\delta\in(0, 1/2]$, 我们定义

$$F(t, x)=\begin{cases} H\left(\dfrac{t}{1-\delta}, x\right), & \forall t\in[0, 1-\delta], \\ c, & \forall t\in[1-\delta, 1]. \end{cases}$$

则 $F\in C^0(I\times S^n, \mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$, 并且

$$F(0, x)=g(x), \quad \forall x\in S^n;$$

$$F(t, x)=c, \quad \forall t\in[1-\delta, 1], \ x\in S^n.$$

再定义这样一个从 D^{n+1} 到 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ 中的映射

$$G(x)=\begin{cases}F(1-\|x\|,\ x/\|x\|), & 若\ \|x\|\geqslant\delta,\\ c, & 若\ \|x\|\leqslant\delta.\end{cases}$$

则显然 $G: D^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ 是连续映射，并且 $G|S^n=g$.

（Ⅲ）考察映射度为 0 的连续映射 $f: S^n\to S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$. 将 f 视为从 S^n 到 $\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$ 的映射，则有

$$W(f,0)=\deg(f)=0.$$

根据 $(\mathrm{HO})''_n$，存在连续映射 $F: D^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$，使得 $F|S^n=f$. 对于 $t\in I, x\in S^n$，我们定义

$$H(t,x)=\frac{F((1-t)x)}{\|F((1-t)x)\|}.$$

显然 $H\in C^0(I\times S^n, S^n)$，并且 H 将 f 同伦于常值映射：

$$H(0,x)=f(x),\quad \forall x\in S^n,$$

$$H(1,x)=\frac{F(0)}{\|F(0)\|},\quad \forall x\in S^n.\qquad \square$$

约定 若存在光滑同胚 $\varphi: X\to Y$，使得 $\varphi(\xi)=\eta$，则称 (X,ξ) 光滑同胚于 (Y,η).

3.6 引理 设 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}，(Ω,b) 光滑同胚于 $(\mathbb{R}^{n+1},0)$，$f\in C^\infty(\Delta,\Omega)$，$b\in\Omega\backslash f(\partial\Delta)$ 是 f 的正则值，并且

$$\deg(f,b)=0.$$

假如 $(\mathrm{HO})''_n$ 成立，则存在 $F\in C^0(\Delta,\Omega\backslash b)$，使得

$$F|\partial\Delta=f|\partial\Delta.$$

这就是说，在所述的条件下，可以在 Δ 的内部修改 f，使得避开值 b.

证明 不妨设 Δ 就是 D^{n+1}，(Ω,b) 就是 $(\mathbb{R}^{n+1},0)$. 光滑映射 $f: D^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ 对点 $b=0$ 的映射度等于 0，因而

$$W(\partial f,0)=0.$$

根据 $(\mathrm{HO})''_n$，存在 $F\in C^0(D^{n+1},\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0)$，使得

$$F|\partial\Delta=\partial f=f|\partial\Delta.\qquad\square$$

3.7 定理（Hopf 定理的特殊情形） 如果 $f\in C^0(S^n,S^n)$ 的映射

度等于 0, 那么 f 同伦于常值映射.

证明 (对 n 归纳) 根据引理 3.4, 论断 $(HO)_1$ 成立. 假设 $(HO)_n$ 成立(因而 $(HO)_n'$ 和 $(HO)_n''$ 也成立), 我们来证明 $(HO)_{n+1}$ 也成立, 即: 如果 $f\in C^0(S^{n+1}, S^{n+1})$ 的映射度等于 0, 那么 f 同伦于常值映射. 设 $\alpha, \beta: S^{n+1}\to S^{n+1}$ 是同伦于 id 的光滑同胚. 若将 f 代之以 $\beta\circ f\circ\alpha$, 则既不改变它所属的同伦类, 也不改变映射度:

$$\beta\circ f\circ\alpha\sim f,\quad \deg(\beta\circ f\circ\alpha)=\deg(f).$$

我们在下面的讨论中, 将充分利用这一事实.

不妨设 $f: S^{n+1}\to S^{n+1}$ 是光滑映射, 并设 a 和 b 是 f 的正则值 $(a\neq b)$. 适当选择同伦于 id 的光滑同胚 $\alpha, \beta: S^{n+1}\to S^{n+1}$, 并以 $\beta\circ f\circ\alpha$ 代替 f, 可以认为:

(i) $b=-a$ 是 a 的对径点;

(ii) $f^{-1}(a)\subset U=\{x\in S^{n+1}\mid \|x-a\|<1\}$,

$f^{-1}(b)\subset V=\{x\in S^{n+1}\mid \|x-b\|<1\}$;

(iii) $f(\overline{V})\subset V$ (根据引理 3.2).

我们记 $\Delta=\overline{V}$, $\Omega=V$. 则 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}, (Ω, b) 光滑同胚于 $(\mathbb{R}^{n+1}, 0)$, 且

$$\deg(f\mid\Delta, b)=0.$$

根据引理 3.6, 存在 $F\in C^0(\Delta, \Omega\backslash b)$, 使得

$$F\mid\partial\Delta=f\mid\partial\Delta.$$

于是, 可以定义这样一个(不取 b 值的)映射:

$$g(x)=\begin{cases}F(x), & \forall x\in\overline{V},\\ f(x), & \forall x\in S^{n+1}\backslash V.\end{cases}$$

显然 $g\in C^0(S^{n+1}, S^{n+1})$. 因为

$$\|f(x)-g(x)\|<2,\quad \forall x\in S^{n+1},$$

所以(根据引理 3.1) f 同伦于 g:

$$f\sim g.$$

又因为 $b\notin g(S^{n+1})$, 所以 g 同伦于常值映射 $c(x)\equiv -b$. 综上所述, 我们已经证明了: f 同伦于常值映射. □

3.8 定理(Hopf 定理，一般情形)　设 M 是一个定向的紧致连通光滑流形，$\dim M=n$. 如果 $f_0, f_1\in C^0(M, S^n)$ 的映射度相等:

$$\deg(f_0)=\deg(f_1),$$

那么 f_0 同伦于 f.

证明　不妨设 f_0 和 f_1 是光滑映射. 记 $X=[0,1]\times M$, 则 X 为带边流形. 我们约定赋予 $\partial X=(0\times M)\cup(1\times M)$"外向型"定向.

取 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 满足这样的条件:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1/9]\cup[8/9,1],\\ 0, & t\in[2/9,7/9].\end{cases}$$

然后定义一个从 X 到 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的映射

$$E(t,x)=\begin{cases}\eta(t)f_0(x), & (t,x)\in[0,1/3]\times M,\\ 0, & (t,x)\in[1/3,2/3]\times M,\\ \eta(t)f_1(x), & (t,x)\in[2/3,1]\times M.\end{cases}$$

显然 $E: X\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是光滑映射. 记 $K=K_0\cup K_1$, 其中

$$K_0=[0,1/9]\times M,\quad K_1=[8/9,1]\times M.$$

因为 $E(K)\subset S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$, 所以 $E\pitchfork_K 0$. 根据横截扩张定理，存在光滑映射

$$F: X\to\mathbb{R}^{n+1},$$

使得

$$F\pitchfork 0,\quad F|K=E|K.$$

适当选择同伦于 id 的光滑同胚 $\alpha: X\to X$ (要求 $\alpha(x)=x,\ \forall x\in K$), 并以 $F\circ\alpha$ 代替 F, 可以认为 F 满足这样的条件:

$$F^{-1}(0)\subset\operatorname{int}\Delta,$$

这里 $\Delta\subset(1/3,2/3)\times M$ 并且 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}. 容易看到:

$$\deg(F|\Delta,0)=\deg(F,0)=W(F|\partial X,0)=\deg(f_1)-\deg(f_0)=0.$$

根据引理 3.6 和定理 3.7, 存在光滑映射 $G:\Delta\to\mathbb{R}^{n+1}\backslash 0$, 使得

$$G|\partial\Delta=F|\partial\Delta.$$

我们记

$$h(t,x)=\begin{cases}F(t,x), & (t,x)\in(I\times M)\backslash\Delta,\\ G(t,x), & (t,x)\in\Delta;\end{cases}$$

$$H(t,x)=\frac{h(t,x)}{\|h(t,x)\|}.$$

显然 $H\in C^0(I\times M,S^n)$ 是从 f_0 到 f_1 的同伦． □

练　习　I

I.1. 设 $p(z)$ 是一个复系数多项式，则 p 决定了一个从复数球面 $\widetilde{\mathbb{C}}\approx S^2$ 到 $\widetilde{\mathbb{C}}\approx S^2$ 的映射．试计算这映射 p 的映射度．

I.2. 映射 $\alpha: S^n\to S^n$ 定义为：$\alpha(x)=-x$, $\forall x\in S^n$．试计算 α 的映射度．

I.3. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$，则有

(a) 如果 $\deg(f)\neq1$，那么存在 $x_0\in S^n$，使得 $f(x_0)=-x_0$;

(b) 如果 $\deg(f)\neq(-1)^{n+1}$，那么存在 $x_0\in S^n$，使得 $f(x_0)=x_0$．

I.4. 设 $f,g\in C^0(S^{2n},S^{2n})$，考察这样三个映射：$f$, g 和 $g\circ f$．试证其中某个映射必具有不动点．

I.5. 设 $f\in C^0(S^{2n},S^{2n})$．则或者 f 具有不动点，或者存在 x_0, $y_0\in S^{2n}$，使得 $f(x_0)=y_0$, $f(y_0)=x_0$．

I.6. 设 $f,g\in C^0(S^n,S^n)$，试证 $g\circ f$ 同伦于 $f\circ g$.

I.7. S^n 具有处处不为 0 的切向量场的充分必要条件是：n 为奇数．

I.8. 设 $F\in C^0(\mathbb{R}^{2n+1},\mathbb{R}^{2n+1})$．试证存在 $x\in\mathbb{R}^{2n+1}\backslash\{0\}$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得

$$F(x)=\lambda x.$$

第十章　局部映射度，Leray 乘积公式与 Jordan-Brouwer 分离定理

§1　映射度定义的局部化

在许多问题里，常常需要了解：有多少 $x\in\Omega$ 能使得 $f(x)=y$？(这里 Ω 是流形上的一个开集.)至少希望能估计

$$\#(\Omega\cap f^{-1}(y))$$

的下界．为此目的，我们来考察局部映射度 $\deg(f,\Omega,y)$（常常简单地记为 $d(f,\Omega,y)$).

1.1　基本约定　在本节中，设 M 和 N 是定向的光滑流形(不带边)，$\dim M=\dim N=n$；并设 Ω 是 M 的开子集，其闭包 $\overline{\Omega}$ 是紧致的．我们还约定记

$$\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\Omega.$$

1.2　定义　对于 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ 和 $y\in N$，如果

$$f(\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\},\quad f\pitchfork_\Omega y,$$

那么

$$f^{-1}(y)\cap\Omega=f^{-1}(y)\cap\overline{\Omega}$$

是 Ω 中的有限点集，因而可定义

$$\deg(f,\Omega,y)=\sum_{p\in\Omega\cap f^{-1}(y)}\operatorname{Sgn}f_{*,p}.$$

1.3　引理　在 1.1 的假定下，如果 $f_i\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ $(i=0,1)$ 和 $y\in N$ 适合条件

(1) $f_i\pitchfork_\Omega y$，$f_i(\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$，$i=0,1$；

(2) 存在连续同伦 $H: f_0\sim f_1$，使得 $H(I\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$，

那么 $$\deg(f_0,\Omega,y)=\deg(f_1,\Omega,y).$$

证明 先将 N 光滑地嵌入到 $\mathbb{R}^k$ 之中(约定把 $\mathbb{R}^k$ 中的范数记为 $\|\cdot\|$,距离函数记为 d). 设 Γ 是 N 在 $\mathbb{R}^k$ 中的管状邻域, $\gamma:\Gamma\to N$ 是相应的管状收缩映射. 通过适当的技术处理,不妨设同伦映射 H 适合以下这些条件:

(i) $H\in C^0(\mathbb{R}\times\overline{\Omega},N)$;

(ii) $H(t,\cdot)=\begin{cases} f_0(\cdot), & \forall t\in(-\infty,1/3],\\ f_1(\cdot), & \forall t\in[2/3,+\infty);\end{cases}$

(iii) $H(\mathbb{R}\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$.

根据 Tietze 扩充定理,不妨设连续映射 $H:\mathbb{R}\times\overline{\Omega}\to N\subset\mathbb{R}^k$ 已扩充为 $H\in C^0(\mathbb{R}\times M,\mathbb{R}^k)$.

因为 $H(I\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$, 所以
$$H(I\times\partial\Omega)\cap\gamma^{-1}(y)=\varnothing.$$
取 $\varepsilon>0$, 使得
$$\{q\in\mathbb{R}^k\mid d(q,H(I\times\overline{\Omega}))<\varepsilon\}\subset\Gamma;$$
并取 $\delta\in(0,\varepsilon/2)$, 使得
$$d(H(I\times\partial\Omega),\ \gamma^{-1}(y))>2\delta.$$
作 H 的光滑逼近 $G\in C^\infty(\mathbb{R}\times M,\mathbb{R}^k)$. 使得
$$\|G(t,x)-H(t,x)\|<\delta,\quad \forall(t,x)\in\mathbb{R}\times\overline{\Omega}.$$
选取 $\eta\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$,适合条件
$$\begin{cases} \eta(t)=1, & \forall t\in[2/9,\ 7/9],\\ 0<\eta(t)<1, & \forall t\in(1/9,\ 2/9)\cup(7/9,\ 8/9),\\ \eta(t)=0, & \forall t\in\mathbb{R}\setminus(1/9,\ 8/9).\end{cases}$$
并记 $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{R}^k\mid\|\lambda\|<\delta\}$. 然后定义这样一个映射:
$$\Phi(t,x,\lambda)=\gamma(\eta(t)(G(t,x)+\lambda)+(1-\eta(t))H(t,x))$$
$$(t\in\mathbb{R},\ x\in\overline{\Omega},\ \lambda\in\Lambda).$$
对 $\eta(t)>0$ 和 $\eta(t)=0$ 的情形分别进行验证,可知
$$(\Phi\mid\mathbb{R}\times\Omega\times\Lambda)\pitchfork y.$$
根据含参数的横截性定理(第 5 章定理 5.6),存在 $\lambda_0\in\Lambda$, 使得

$$(\Phi|\mathbb{R}\times\Omega\times\{\lambda_0\}) \pitchfork y.$$

我们记

$$F(t,x)=\Phi(t,x,\lambda_0).$$

则 $F\in C^0(\mathbb{R}\times\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\mathbb{R}\times\Omega,N)$ 满足这样一些条件:

(Ⅰ) $F(t,\cdot)=\begin{cases} f_0(\cdot), & \forall t\leqslant 1/9,\\ f_1(\cdot), & \forall t\geqslant 8/9;\end{cases}$

(Ⅱ) $F(\mathbb{R}\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$;

(Ⅲ) $(F|\mathbb{R}\times\Omega)\pitchfork y$.

依照 M 的定向赋予其开子集 $\Omega\subset M$ 定向，然后赋予 $I\times\Omega$ 以乘积定向．于是 $I\times\Omega$ 的定向在 $0\times\Omega$ 和 $1\times\Omega$ 上分别诱导出"内向型"定向和"外向型"定向．对于 $i=0,1$, 我们定义映射

$$j_i: \Omega\to i\times\Omega,$$
$$p\mapsto (i,p).$$

易见 j_i 是保持定向的光滑同胚．对于 $F_i=F|(i\times\Omega)$, 显然有

$$f_i=F_i\circ j_i,\quad i=0,1. \tag{1.1}$$

集合 $F^{-1}(y)\cap(I\times\Omega)=F^{-1}(y)\cap(I\times\overline{\Omega})$ 是 $I\times\Omega$ 的紧致的 1 维正则子流形．对于 $X=I\times\Omega$ 和 $Y=N$ 引用第九章的命题 1.6 和注记 1.7, 可以断定:

(A) 如果 $Z=F^{-1}(y)\cap(I\times\Omega)$ 的某个连通分支的两个端点 $(0,p)$ 和 $(1,q)$ 分属于"两岸"$0\times\Omega$ 和 $1\times\Omega$, 那么

$$\operatorname{Sgn}(F_0)_{*,(0,p)}=\operatorname{Sgn}(F_1)_{*,(1,q)},$$

据此并利用(1.1)可得

$$\operatorname{Sgn}(f_0)_{*,p}=\operatorname{Sgn}(f_1)_{*,q}; \tag{1.2}$$

(B) 如果 $Z=F^{-1}(y)\cap(I\times\Omega)$ 的某个连通分支的两个端点是 (i,r) 和 (i,s)(属于"同一岸"$i\times\Omega$, $i\in\{0,1\}$), 那么

$$\operatorname{Sgn}(F_i)_{*,(i,r)}+\operatorname{Sgn}(F_i)_{*,(i,s)}=0,$$

因而

$$\operatorname{Sgn}(f_i)_{*,r}+\operatorname{Sgn}(f_i)_{*,s}=0. \tag{1.3}$$

对于 $(i,x)\in F^{-1}(y)\cap(i\times\Omega)$ 求 $\operatorname{Sgn}(f_i)_{*,x}$ 之和，利用上面得到

的(1.2)式和(1.3)式就得到

$$\deg(f_0, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega, y). \tag{1.4}$$

这样，我们完成了引理的证明． □

1.4 引理 设 $f \in C^0(\overline{\Omega}, N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}.$$

则存在 $f_0 \in C^0(\overline{\Omega}, N) \cap C^\infty(\Omega, N)$ 和 $H \in C^0(I \times \overline{\Omega}, N)$，使得

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega y$;

(2) $H(0, \cdot) = f_0(\cdot)$, $H(1, \cdot) = f(\cdot)$;

(3) $H(I \times \partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$.

证明 将 N 光滑地嵌入 $\mathbb{R}^k$（约定把 $\mathbb{R}^k$ 中的范数记为 $\|\cdot\|$，距离函数记为 d）．设 Γ 是 N 在 $\mathbb{R}^k$ 中的管状邻域，并设

$$\gamma : \Gamma \to N$$

是相应的管状投影（管状收缩映射）．则存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\{q \in \mathbb{R}^k \mid d(q, f(\overline{\Omega})) < \varepsilon\} \subset \Gamma.$$

因为 $f(\partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$，所以 $f(\partial\Omega) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing$．因而存在 $\delta \in (0, \varepsilon/2)$，使得

$$d(f(\partial\Omega), \gamma^{-1}(y)) > 2\delta. \tag{1.5}$$

根据 Tietze 定理，不妨设连续映射

$$f : \overline{\Omega} \to N \subset \mathbb{R}^k$$

已扩充为 $f \in C^0(M, \mathbb{R}^k)$．选择 f 的光滑逼近 $g \in C^\infty(M, \mathbb{R}^k)$，使得

(i) $g \pitchfork \gamma^{-1}(y)$,

(ii) $\|g(x) - f(x)\| < \delta$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

然后定义这样一个映射：

$$G(t, x) := f(x) + (1 - t)(g(x) - f(x)).$$

根据(1.5)和 g 所满足的条件(ii)，可以断定

$$g(\partial\Omega) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing, \quad G(I \times \partial\Omega) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing.$$

我们定义

$$f_0 = \gamma \circ g, \quad H = \gamma \circ G.$$

容易验证：f_0 和 H 满足引理的全部要求． □

1.5 定义 设$f\in C^0(\overline{\Omega},N)$适合条件$f(\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$．根据引理 1.4，存在$f_0\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$和$H\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$，使得

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega y$；

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot)$，$H(1,\cdot)=f(\cdot)$；

(3) $H(I\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$．

我们定义

$$\deg(f,\Omega,y):=\deg(f_0,\Omega,y).$$

1.6 命题 定义 1.5 确当无歧义，并且所定义的$\deg(f,\Omega,y)$有这样的同伦不变性：如果存在$G\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$，使得

(1) $G(0,\cdot)=f(\cdot)$，$G(1,\cdot)=g(\cdot)$，

(2) $G(I\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$，

那么

$$\deg(g,\Omega,y)=\deg(f,\Omega,y). \qquad \square$$

§2 Leray 乘积公式

设Ω是$\mathbb{R}^n$中的开集，$\overline{\Omega}$是紧致的．本节考察$f\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$的映射度．这部分内容有很广的应用面．为了便于查阅，我们首先综述此情形映射度的一般性质，然后证明 Leray 乘积公式．

首先，设$g\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$，$g(\partial\Omega)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{y\}$并且$(g|\Omega)\pitchfork y$．对此情形，我们这样定义映射度：

$$\deg(g,\Omega,y)=\sum_{p\in g^{-1}(y)\cap\Omega}\operatorname{Sgn} g_{*,p}.$$

其次，对于一般的$f\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$和$y\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$，存在$g\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)$和$H\in C^0(I\times\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$，使得

(1) $(g|\Omega)\pitchfork y$；

(2) $H(0,\cdot)=f(\cdot)$，$H(1,\cdot)=g(\cdot)$；

(3) $H(I\times\partial\Omega)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{y\}$．

我们定义

$$\deg(f,\Omega,y):=\deg(g,\Omega,y)$$

($\deg(\cdot,\Omega,y)$ 常常简写为 $d(\cdot,\Omega,y)$).

2.1 定理 如上所述的映射度具有这样一些基本性质:

(d_1) **标准性** 设 id 是 $\mathbb{R}^n$ 中恒同映射的限制, $y\in\Omega$, 则有

$$d(\mathrm{id},\Omega,y)=1;$$

(d_2) **区域可加性** 设 $\Omega_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是有限个两两不相交的 Ω 的开子集,并设

$$y\in\mathbb{R}^n\setminus f\left(\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right),$$

则有

$$d(f,\Omega,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}d(f,\Omega_\lambda,y);$$

(d_3) **同伦不变性** 如果 $F\in C^0(I\times\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 使得

$$F(I\times\partial\Omega)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{y\},$$

那么对于 $F_t(\cdot)=F(t,\cdot)\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 有

$$d(F_t,\Omega,y)=d(F_0,\Omega,y),\quad\forall t\in I;$$

(d_4) **平移不变** 设 $f\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $y\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$, 则有

$$d(f,\Omega,y)=d(f-y,\Omega,0).$$

2.2 注记 可以证明,性质(d_1)−(d_4)完全决定了 $C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 情形的映射度.

2.3 定理 如上所述的映射度还具有以下这些性质:

(d_5) **切除性质** 设 K 是含于 Ω 中的紧致集, $y\notin f(K)\cup f(\partial\Omega)$, 则

$$d(f,\Omega,y)=d(f,\Omega\setminus K,y)$$

(在(d_2)中取 $\Lambda=\{1\}$, $\Omega_1=\Omega\setminus K$ 即得);

(d_6) **Kronecker 存在性质** 如果 $y\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 使得 $d(f,\Omega,y)\neq0$, 那么

$$f^{-1}(y)\cap\Omega\neq\varnothing;$$

(d_7) **由边界值唯一确定** 设 $C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ 中的映射 f 和 g 满足

条件 $f|\partial\Omega=g|\partial\Omega$，则对于 $y\in\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 有

$$d(f,\Omega,y)=d(g,\Omega,y)$$

(在 (d_3) 中取 $F(t,x)=(1-t)f(x)+tg(x)$);

(d_8) 设 $\gamma\in C^0(I,\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega))$, 则

$$d(f,\Omega,\gamma(t))=d(f,\Omega,\gamma(0)),\quad \forall t\in I$$

(应用 (d_3) 于 $d(f-\gamma(t),\Omega,0)$).

2.4 注记 根据 (d_8), 对于 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的一个连通分支中所有的 y, 映射度 $d(f,\Omega,y)$ 都是同样的．若集合 Δ 含于 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的某一个连通分支之中, 则可定义

$$d(f,\Omega,\Delta):=d(f,\Omega,y)\quad (y\in\Delta).$$

2.5 引理 设 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致集，Δ 是 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ 的任意一个连通分支, 则

$$\partial\Delta=\overline{\Delta}\setminus\Delta\subset\Gamma.$$

证明 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ 的各连通分支都是开集．Δ 中的点都是 Δ 的内点, 其他连通分支中的点都是 Δ 的外点．因而 Δ 的边界点全在 Γ 中, 即 $\partial\Delta=\overline{\Delta}\setminus\Delta\subset\Gamma$． □

2.6 定理(Leray 乘积公式) 设 $f\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $g\in C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $z\in\mathbb{R}^n\setminus g(f(\partial\Omega))$.

(d_9) 如果 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 是连通的 (不存在有界的连通分支), 那么

$$d(g\circ f,\Omega,z)=0.$$

(d_{10}) 如果 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的有界连通分支为 $\Delta_1,\cdots,\Delta_r$, 那么

$$d(g\circ f,\Omega,z)=\sum_{i=1}^{r}d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z).$$

证明 因为 $\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\Omega$ 紧致, 并且 $z\notin g(f(\partial\Omega))$, 所以可设

$$d(z,g(f(\partial\Omega)))>2\delta>0.$$

选取 $g_1\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, 使得

(1) $\|g_1(y)-g(y)\|<\delta,\ \forall y\in f(\partial\Omega)$;

(2) $g_1\pitchfork z$.

我们定义

$$G(t,y)=g(y)+t(g_1(y)-g(y)), \tag{2.1}$$

并记

$$H(t,x)=G(t,f(x)). \tag{2.2}$$

则有

(i) $H(0,\cdot)=g\circ f(\cdot)$, $H(1,\cdot)=g_1\circ f(\cdot)$;

(ii) $H(I\times\partial\Omega)\subset\mathbb{R}^n\setminus\{z\}$.

因而有

$$d(g\circ f,\Omega,z)=d(g_1\circ f,\Omega,z). \tag{2.3}$$

取足够大的 ρ, 使得 $f(\overline{\Omega})\subset B_\rho$, 并约定记

$$K=\overline{B}_{2\rho}.$$

设 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的连通分支为 $\Delta_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_r$, 其中仅 Δ_0 是无界连通分支. 因为 $\overline{\Delta}_0\cap K$ 和 $\overline{\Delta}_i(i=1,\cdots,r)$ 都是紧致的, 所以可设

$$g_1^{-1}(z)\cap\overline{\Delta}_0\cap K=\{y_{(0,1)},\cdots,y_{(0,s_0)}\};$$

$$g_1^{-1}(z)\cap\overline{\Delta}_i=\{y_{(i,1)},\cdots,y_{(i,s_i)}\},\quad i=1,\cdots,r.$$

以下将 $y_{(i,j)}$ 简记为 y_{ij}, 并记

$$E=\{y_{ij}\mid i=0,\cdots,r;\ j=1,\cdots,s_i\}.$$

因为 $E\subset\mathbb{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$, 所以存在 $\varepsilon\in(0,\rho)$, 使得 $d(E,f(\partial\Omega))>2\varepsilon$. 取 $f_1\in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, 适合条件

(Ⅰ) $\|f_1(x)-f(x)\|<\varepsilon,\ \forall x\in\overline{\Omega}$;

(Ⅱ) $f_1 \pitchfork y_{ij},\ i=0,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s_i$.

然后定义

$$F(t,x)=f(x)+t(f_1(x)-f(x)).$$

则有

$$\begin{cases}F(0,\cdot)=f(\cdot),\ F(1,\cdot)=f_1(\cdot),\\ F(I\times\partial\Omega)\subset\mathbb{R}^n\setminus E.\end{cases} \tag{2.4}$$

约定记

$$\alpha_i=d(f,\Omega,\Delta_i)=d(f,\Omega,y_{ij})=d(f_1,\Omega,y_{ij})$$
$$(i=0,\cdots,r,\ 显然\ \alpha_0=d(f,\Omega,\Delta_0)=0);$$

$$\beta_{ij}=\mathrm{Sgn}(g_1)_{*,y_{ij}}\quad (i=0,\cdots,r,\quad j=1,\cdots,s_i).$$

做了以上准备工作之后，我们来证明 Leray 乘积公式．鉴于 $f_1(\Omega)\subset K$，显然有

$$\Omega\cap(g_1\circ f_1)^{-1}(z)=\Omega\cap f_1^{-1}(g_1^{-1}(z)\cap K)=\Omega\cap f_1^{-1}(E).$$

计算得到

$$\begin{aligned}
d(g\circ f,\Omega,z)&=d(g_1\circ f,\Omega,z)\quad(\text{依据 }(2.3))\\
&=d(g_1\circ f_1,\Omega,z)\quad(\text{依据}(2.4))\\
&=\sum_{p\in\Omega\cap(g_1\circ f_1)^{-1}(z)}\mathrm{Sgn}(g_1\circ f_1)_{*,p}\\
&=\sum_{p\in\Omega\cap f_1^{-1}(E)}\mathrm{Sgn}(g_1\circ f_1)_{*,p}\\
&=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij}\Big(\sum_{p\in\Omega\cap f_1^{-1}(y_{ij})}\mathrm{Sgn}(f_1)_{*,p}\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij}\alpha_i.
\end{aligned}$$

如果 $r=0$，那么鉴于 $\alpha_0=0$，我们得到 (d_9)：

$$d(g\circ f,\Omega,z)=0.$$

如果 $r>0$，那么

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r}d(f,\Omega,\Delta_i)\,d(g,\Delta_i,z)&=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\,d(g_1,\Delta_i,z)\\
&=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{ij}\Big)=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{s_i}\alpha_i\beta_{ij}.
\end{aligned}$$

我们得到 (d_{10})：

$$d(g\circ f,\Omega,z)=\sum_{i=1}^{r}d(f,\Omega,\Delta_i)\,d(g,\Delta_i,z).\qquad\square$$

2.7 注记 $d(g\circ f,\Omega,z)$ 由 $g\circ f$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的值(甚至是由 $g\circ f$

在 $\partial\Omega$ 上的值)所决定．因此只须 $g\in C^0(f(\overline{\Omega}),\mathbb{R}^n)$ 就能确定 $d(g\circ f,\Omega,z)$．对这情形，先用 Tietze 定理将 g 扩充为 $\tilde{g}\in C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$，然后引用 Leray 乘积公式就得到

$$d(g\circ f,\Omega,z)=\sum_i{}' d(f,\Omega,\Delta_i)\,d(g,\Delta_i,z).$$

这里 $\sum'$ 表示仅对包含在 $f(\overline{\Omega})$ 中的那些 Δ_i 求和，因为对其他的连通分支 Δ'' 有

$$d(f,\Omega,\Delta'')=0.$$

§3 Jordan-Brouwer 分离定理

Jordan-Brouwer 分离定理是著名的 Jordan 曲线定理的一般化．本节将利用 Leray 乘积公式证明 Jordan-Brouwer 分离定理，然后介绍该定理的若干重要应用．

3.1 定理 设 C 和 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧致子集，它们之间存在同胚映射 $h: C\to\Gamma$．则 $\mathbb{R}^n\setminus C$ 和 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ 有同样多个连通分支．

证明 设 $\mathbb{R}^n\setminus C$ 的连通分支为 $D_0,\cdots,D_r$(其中 D_0 为无界连通分支)．设 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ 的连通分支为 $\Delta_0,\cdots,\Delta_s$(其中 Δ_0 为无界连通分支)．我们先对 $0<r<+\infty$ 情形证明 $r=s$．

引用 Tietze 定理，分别将

$$h: C\to\Gamma \quad 和 \quad h^{-1}: \Gamma\to C$$

扩充为连续映射

$$f: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n \quad 和 \quad g: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n.$$

考察 $\mathbb{R}^n\setminus C$ 的有界连通分支 D_i．因为 $\partial D_i\subset C$(引理 2.5)，所以

$$g\circ f(x)=x,\quad \forall x\in\partial D_i. \tag{3.1}$$

设 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial D_i)=\mathbb{R}^n\setminus h(\partial D_i)$ 的连通分支为 $E_0,\cdots,E_q$(其中 E_0 为无界连通分支)．注意到(3.1)式，鉴于映射度的性质(d_1)，(d_7) 和 (d_{10})，对 $y\in D_i$ 我们有

$$1=d(g\circ f,D_i,y)=\sum_{k=1}^{q}d(f,D_i,E_k)d(g,E_k,y).$$

另一方面，因为

(1) Δ_j 是 $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma$ 的连通分支；

(2) E_k 是 $\mathbb{R}^n\setminus f(\partial D_i)$ 的连通分支；

(3) $\partial D_i\subset C$, $f(\partial D_i)\subset f(C)=\Gamma$, $\mathbb{R}^n\setminus\Gamma\subset\mathbb{R}^n\setminus f(\partial D_i)$,

所以每个 Δ_j 包含在某个确定的 $E_{k(j)}$ 之中．特别有

$$\Delta_0\subset E_0. \tag{3.2}$$

又因为

$$x\in\mathbb{R}^n\setminus\bigcup_{j=0}^{s}\Delta_j=\Gamma\Longrightarrow g(x)\in C\subset\mathbb{R}^n\setminus D_i,$$

所以对于 $y\in D_i$ 有

$$g^{-1}(y)\subset\bigcup_{j=0}^{s}\Delta_j. \tag{3.3}$$

对于 $y\in D_i$ 和 $k\geqslant 1$, 由(3.2)和(3.3)得到

$$g^{-1}(y)\cap E_k\subset\bigcup_{j=1}^{s}\Delta_j. \tag{3.4}$$

我们还注意到：对于包含在 E_0 之中的那些有界的 $\Delta_{j'}$, 显然有

$$d(f,D_i,\Delta_{j'})=0. \tag{3.5}$$

于是

$$1=\sum_{k=1}^{q}d(f,D_i,E_k)d(g,E_k,y)=\sum_{k=1}^{q}\sum_{\Delta_j\subset E_k}d(f,D_i,\Delta_j)d(g,\Delta_j,y)$$

$$=\sum_{k=0}^{q}\sum_{\substack{\Delta_j\subset E_k\\ j\geqslant 1}}d(f,D_i,\Delta_j)d(g,\Delta_j,y)=\sum_{j=1}^{s}d(f,D_i,\Delta_j)d(g,\Delta_j,D_i).$$

交换 f 与 g 的地位，也有类似的公式．因而有

$$(3.6) \qquad 1 = \sum_{j=1}^{s} d(f, D_i, \Delta_j) d(g, \Delta_j, D_i),$$

$$(3.7) \qquad 1 = \sum_{i=1}^{r} d(g, \Delta_j, D_i) d(f, D_i, \Delta_j).$$

对 $i=1,\cdots,r$ 将(3.6)式求和并利用(3.7)式就得到

$$\begin{aligned} r &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} d(f, D_i, \Delta_j) d(g, \Delta_j, D_i) \\ &= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} d(g, \Delta_j, D_i) d(f, D_i, \Delta_j) \\ &= s. \end{aligned}$$

以上对 $0<r<+\infty$ 情形证明了定理.

用下面所述的办法，可以将已证明的结论拓展到 $0 \leqslant r < +\infty$ 情形. 首先，取足够大的正实数 ρ，使得 $C \cup \Gamma \subset B_\rho$. 约定记 $K = \overline{B}_{2\rho}$，并记

$$C' = C \cup \partial K, \quad \Gamma' = \Gamma \cup \partial K.$$

显然 C' 和 Γ' 都是紧致集，并且 C' 同胚于 Γ'. 另一方面，C' 与 Γ' 的有界连通分支的数目分别为

$$r' = r + 1 \quad 与 \quad s' = s + 1,$$

并且显然有 $0 < r' < +\infty$. 根据前面已经证明的结果

$$r' = s',$$

因而 $r = s$.

如果 $r = +\infty$，那么必有 $s = +\infty$. 否则，根据上面的讨论，由 $0 \leqslant s < +\infty$，可得 $r = s < +\infty$.

至此，对所有的情形，我们完成了定理的证明. □

3.2 定理(Jordan-Brouwer 分离定理) 如果 $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 是球面 S^n 的同胚像，那么 $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ 恰有两个连通分支，并且每个连通分支的边界都是 M.

证明 首先，由引理 3.1 可知，$\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ 恰有两个连通分支，设为 Δ_0 和 Δ_1(都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集). 其次，在引理 2.5 中，我们已

经证明了

$$\partial \Delta_i \subset M, \quad i=0,1.$$

因此，留待证明的仅仅是：任何 $q \in M$ 都是 Δ_0 和 Δ_1 共同的边界点.

任取 q 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个开邻域 V. 设 h 是从 S^n 到 M 的同胚映射，$q=h(p)$. 在 S^n 上，取以 p 为中心的 n 维"开圆盘式"邻域 B，使得

$$h(\overline{B}) \subset V \cap M.$$

因为 $S^n \backslash B$ 是 n 维"闭圆盘式"紧致集，所以 $h(S^n \backslash B)$ 不能分离 $\mathbb{R}^{n+1}$. 因而有 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash h(S^n \backslash B)$ 中的连续曲线 γ，使得

$$\gamma(0) \in \Delta_0, \quad \gamma(1) \in \Delta_1.$$

于是，存在 $\tau \in (0,1)$，使得

$$\gamma(\tau) \in h(B).$$

我们记

$$\tau_0 = \inf\{\tau \in I \mid \gamma(\tau) \in h(B)\}, \quad \tau_1 = \sup\{\tau \in I \mid \gamma(\tau) \in h(B)\}.$$

则有

$$\gamma(\tau_i) \in h(\overline{B}) \subset V, \quad i=0,1;$$

并且有

$$\gamma([0,\tau_0)) \subset \Delta_0, \quad \gamma((\tau_1,1]) \subset \Delta_1.$$

于是，存在 $t_0 \in (0,\tau_0)$ 和 $t_1 \in (\tau_1,1)$，使得

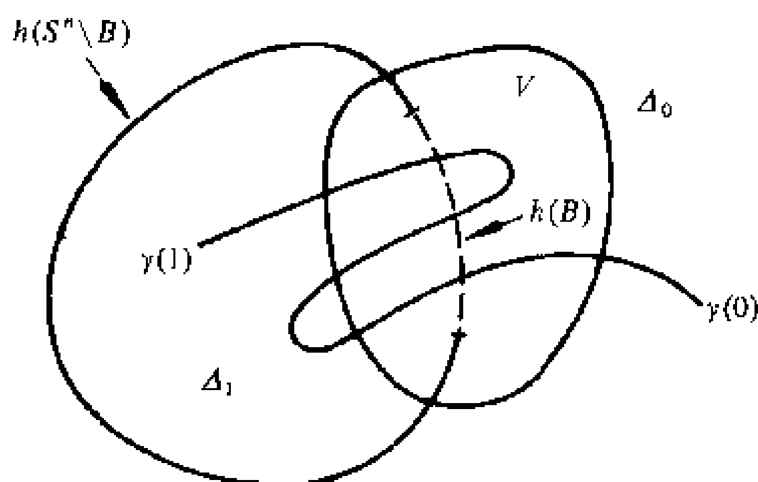


图 26

$$\gamma(t_i)\in V\cap\Delta_i,\quad i=0,1.$$

因而

$$V\cap\Delta_i\neq\varnothing,\quad i=0,1.$$

这证明了 q 是 Δ_0 和 Δ_1 共同的边界点(参看图 26)． □

3.3 定理(区域不变性定理) 设 U 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集，$h: U\to V\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 是从 U 到 $V=h(U)$ 的同胚映射,则 V 也是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集．

证明 对任意的 $q=h(p)\in V$,取一个以 p 为中心的 $n+1$ 维闭球体 $D\subset U$．于是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus h(\partial D)$ 恰有两个连通分支：Δ_0 和 Δ_1．每个连通分支都是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集．因为 $W=h(\mathrm{int}D)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus h(\partial D)$ 中的连通集,所以必有一个 $\Delta=\Delta_i(i\in\{0,1\})$ 使得

$$W\subset\Delta.$$

下面将证明：实际上只能有 $W=\Delta$(因而只可能是 $W=\Delta_1$).

假设 $W\subsetneq\Delta$,则集合

$$\mathbb{R}^{n+1}\setminus h(D)=(\mathbb{R}^{n+1}\setminus h(\partial D))\setminus W=(\Delta_0\cup\Delta_1)\setminus W$$

既含有 Δ_0 的点,又含有 Δ_1 的点,并且 $\Delta_0\cap\Delta_1=\varnothing$．但这与 $h(D)$ 不能分离 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的事实相矛盾．

我们证明了：对于 V 的任意一点 q,存在 q 的开邻域 $W=\Delta\subset V$．因而 V 是一个开集． □

3.4 定理(维数不变性) 设 U 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的开集，V 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集．若 U 同胚于 V,则必有 $m=n$．

证明 用反证法．假设 $m>n$．因为存在从 $U\subset\mathbb{R}^{m+1}$ 到

$$V\subset\mathbb{R}^{n+1}\subset\mathbb{R}^{m+1}$$

的同胚,所以 V 是 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中的开集．但这与

$$V\subset\mathbb{R}^{n+1},\quad n<m$$

相矛盾．因而只能有 $m\leqslant n$．同样可证 $n\leqslant m$． □

§4 紧致超曲面的分离性质

4.1 定义 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的任何一个连通的 n 维光滑正则子流形被

称为($\mathbb{R}^{n+1}$中的)**超曲面**.

本节讨论 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中紧致超曲面 M 的分离性质. 将证明 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支,这两个连通分支以 M 为共同的边界. $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 的无界连通分支 D_0 被称为外部区域,有界连通分支 D_1 被称为内部区域. 指向外部(或内部)的"法方向"在 M 上诱导出确定的定向. 因而任何一个紧致的超曲面 M 都是可定向的. 这一重要事实将在第十二章 §2 的讨论中用到.

4.2 引理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面, $q\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$. 则对于任意的 $p\in M$ 和 p 点在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的任意开邻域 W, 存在 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 中的连续曲线将 q 点与 W 中的某个点联结.

证明 首先,记

$$E=\{p\in M\,|\,p\text{ 点满足所述的要求}\}.$$

我们将证明:

(Ⅰ) $E\neq\varnothing$;

(Ⅱ) E 是 M 中的既开且闭的集合.

以上两项得到确认之后,根据 M 的连通性,就可以断定 $E=M$, 从而完成引理的证明.

(Ⅰ)的验证 因为 M 是紧致的,所以存在 $p_0\in M$, 使得

$$d(p_0,q)=d(M,q).$$

联结 p_0 点与 q 点的直线段除了端点 p_0 而外全在 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 之中. 可见 $p_0\in E$.

(Ⅱ)的验证 对于任意的 $p\in M$, 存在 p 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的关于 M 为正则的开邻域 U, 使得 $U\cap(\mathbb{R}^{n+1}\setminus M)$ 恰有两个连通分支,并且 $U\cap M$ 恰好是这两个连通分支边界集合的交集. 若 p 的任何一个邻域中都有点能用 $\mathbb{R}^{n-1}\setminus M$ 中的连续曲线与 q 点联结,显然 $U\cap M$ 中的任意一点 p' 也具有同样的性质. 这证明了 E 是 M 中的开集. 仿此可以证明 E 是 M 中的闭集. □

4.3 引理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面,则 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 至多只有两个连通分支,并且每个连通分支都以 M 为其边界集.

证明 任意取定一点 $p\in M$. 设 U 是 p 点在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开邻域, $U\cap(\mathbb{R}^{n+1}\setminus M)$ 恰有两个连通分支 U_0 和 U_1, 并且 $U\cap M$ 恰好是 U_0 的边界集合与 U_1 的边界集合的交集合. 任何 $q\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 都可用 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 中的连续曲线与 U_0 或 U 中的点相联结, 所以 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 至多只有两个连通分支.

因为 p 点可以在 M 上任意选取, 并且对于 p 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的任意一个开邻域 W, 存在 $U\subset W$ 具有上面所述的性质, 所以 M 的每一点都是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 的各连通分支的边界点. □

4.4 引理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面, $q\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$, θ 是这样一个映射

$$\theta: M\to S^n,$$

$$x\mapsto\frac{x-q}{\|x-q\|}.$$

对于 $v\in S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$, 考察射线

$$r_v=\{q+tv\mid t\in(0,+\infty)\}.$$

我们断定

$$\theta\pitchfork v\Longleftrightarrow M\pitchfork r_v.$$

证明 我们来考察放入映射

$$\Psi: M\to\mathbb{R}^{n+1}$$

和映射 θ 的扩充

$$\Theta:\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{q\}\to S^n,$$

$$x\mapsto\frac{x-q}{\|x-q\|}.$$

易见对任意的 $v\in S^n$ 都有

$$\Theta\pitchfork v,\quad \Theta^{-1}(v)=r_v.$$

根据第五章的引理 5.5, 可以断定

$$\Theta\circ\Psi\pitchfork v\Longleftrightarrow\Psi\pitchfork r_v.$$

这就是

$$\theta\pitchfork v\Longleftrightarrow M\pitchfork r_v. \quad □$$

4.5 引理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面，q_1 和 q_2 是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 中的两点，并且从 q_1 点出发通过 q_2 点的射线与 M 相横截．如果该射线上从 q_1 点到 q_2 点的线段与 M 相交 k 次，那么

$$W_2(M,q_1)=W_2(M,q_2)+k \pmod 2.$$

证明 首先取

$$v=\frac{q_2-q_1}{\|q_2-q_1\|}.$$

然后，对于 $i=1,2$，考察映射

$$\theta_i: M \to S^n,$$

$$x \mapsto \frac{x-q_i}{\|x-q_i\|}$$

和射线

$$r_i=\{q_i+tv \mid t\in(0,+\infty)\}.$$

根据引理 4.4，v 是 θ_1 和 θ_2 共同的正则值．还容易看出：

$$\#\theta_1^{-1}(v)=\#\theta_2^{-1}(v)+k \pmod 2.$$

因而

$$W_2(M,q_1)=W_2(M,q_2)+k \pmod 2. \qquad \square$$

4.6 引理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面，q_1 和 q_2 属于 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 的同一个连通分支，则

$$W_2(M,q_1)=W_2(M,q_2).$$

证明 设 q_t 是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 中联结 q_1 和 q_2 的连续曲线，则

$$\theta_t(x)=\frac{x-q_t}{\|x-q_t\|} \quad ((t,x)\in I\times M)$$

是映射 θ_1 与 θ_2 之间的同伦映射，因而

$$W_2(M,q_1)=W_2(M,q_2). \qquad \square$$

4.7 定理 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面，则 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支：无界的连通分支

$$D_0=\{q\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus M \mid W_2(M,q)=0\}$$

和有界的连通分支

$$D_1=\{q\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus M \mid W_2(M,q)=1\}.$$

证明 任取一点 $p\in M$．设 l 是 M 在 p 点的法线，则

$$l \pitchfork_p M.$$

于是，存在 l 上的两点 q_0 和 q_1，使得在 q_0 与 q_1 之间 l 与 M 的交点只有单独一个 p 点(练习 J.9)．根据引理 4.5，

$$W_2(M,q_1)=W_2(M,q_0)+1 \pmod 2.$$

不妨设 $q_0\in D_0$，$q_1\in D_1$．因而 D_0 和 D_1 都不是空集．

我们注意到这样一些重要事实：

(1) $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M=D_0\cup D_1$，$D_0\cap D_1=\varnothing$；

(2) $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 至多只有两个连通分支(引理 4.3)，并且每个连通分支完全包含在某一个确定的 D_i 之中(引理 4.6)．

因为 D_0 和 D_1 都不是空集，所以 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支，这两个连通分支就是 D_0 和 D_1．还容易证明(练习 J.10)：D_0 是无界连通分支，D_1 是有界连通分支． □

练 习 J

J.1. (推广的 Rouché 定理) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集，$f,g\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$．如果 $\|g(x)\|<\|f(x)\|$，$\forall x\in\partial\Omega$，那么

$$d(f+g,\Omega,0)=d(f,\Omega,0).$$

J.2. 设 $f\in C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$，$D=D^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点 O 为中心的闭单位球体．如果 $f(\partial D)=\partial D$，那么 $d(f^{(m)},D,0)=(d(f,D,0))^m$．这里 $f^{(m)}=f\circ f^{(m-1)}$ 表示 m 个 f 的复合．

J.3. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界开集，V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集，$f\in C^0(\overline{U},\mathbb{R}^m)$，$g\in C^0(\overline{V},\mathbb{R}^n)$，$a\in\mathbb{R}^m\setminus f(\partial U)$，$b\in\mathbb{R}^n\setminus g(\partial V)$．考察映射

$$(f,g): \overline{U}\times\overline{V}\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$$
$$(u,v)\mapsto(f(u),g(v)).$$

试证明 $d((f,g),U\times V,(a,b))=d(f,U,a)\,d(g,V,b)$.

J.4. 约定以 $(\cdot,\ \cdot)$ 表示 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的内积. 设 $f\in C^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 满足条件

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{(f(x),x)}{\|x\|}=+\infty,$$

求证 $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

J.5. 设 F 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭集. 求证 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus F$ 至多只有可数个连通分支.

J.6. 设 F 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭集, U 是 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus F$ 的一个连通分支. 求证 $U\cup F$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭集.

J.7. 分别举出满足以下条件的例子(在各小题中,要求 Ω 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的有界开集,并且要求 $f\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^{n+1})$ 不是常值映射):

(a) $\mathbb{R}^{n+1}\setminus f(\partial\Omega)$ 是连通的;

(b) $\mathbb{R}^{n+1}\setminus f(\partial\Omega)$ 不连通, Δ_0 是其无界连通分支,却有

$$\Delta_0\cap f(\Omega)\neq\varnothing;$$

(c) $\mathbb{R}^{n+1}\setminus f(\partial\Omega)$ 不连通,并且至少存在某一个有界连通分支 Δ, 使得 $\Delta\cap f(\Omega)=\varnothing$.

J.8. 设 U 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集,并设 $h: U\to\mathbb{R}^{n+1}$ 是连续的单映射. 试证 $V=h(U)$ 也是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的开集,并且 $h: U\to V$ 是同胚映射.

J.9. 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致超曲面, $p\in M$, l 是 M 在 p 点的法线. 求证存在 l 上的两点 q_0 和 q_1, 使得在 q_0 与 q_1 之间 l 与 M 的交点只有 p 点.

J.10. 设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致超曲面. 求证存在实数 $K>0$, 使得只要 $q\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\|q\|>K$, 就有 $W_2(M,q)=0$.

第十一章　相交数，向量场奇点的指标与 Poincaré－Hopf 定理

§1　模 2 相交数

1.1　定义　设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，S 是 N 的闭的正则子流形，并且

$$\dim M+\dim S=\dim N.$$

如果 $f: M\to N$ 是光滑映射，适合条件

$$f\pitchfork S,$$

那么 $f^{-1}(S)$ 是有限点集．我们把 f 与 S 的模 2 相交数定义为

$$I_2(f,S):=\#f^{-1}(S)\pmod 2.$$

一般约定　设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，S 是 N 的闭的正则子流形，并且

$$\dim M+\dim S=\dim N.$$

1.2　引理　设 X 是紧致光滑带边流形，$\partial X=M$．如果 $F\in C^\infty(X,N)$ 满足条件

$$F\pitchfork S,\quad \partial F\pitchfork S,$$

那么 $f=\partial F$ 与 S 的模 2 相交数是 0，即：$I_2(f,S)=0$.

证明　因为

$$\dim X-\dim F^{-1}(S)=\dim N-\dim S,$$
$$\dim M+1-\dim F^{-1}(S)=\dim M,$$
$$\dim F^{-1}(S)=1,$$

所以 $F^{-1}(S)$ 是紧致的 1 维带边流形．集合 $f^{-1}(S)=F^{-1}(S)\cap\partial X$ 含

有偶数个点，因而

$$\#f^{-1}(S)=0 \pmod 2). \qquad \square$$

1.3 引理 设 $f_i\in C^\infty(M, N)$ $(i=1,2)$ 适合条件

$$f_1 \pitchfork S, \quad f_2 \pitchfork S.$$

如果 $f_1\sim f_2$ (C^0 同伦)，那么

$$I_2(f_1, S)=I_2(f_2, S).$$

证明 f_1 必定也光滑同伦于 f_2，即存在光滑映射 $H: I\times M\to N$，使得

$$H(t, \cdot)=f_1(\cdot), \quad \forall t\in[0, \delta],$$

$$H(t, \cdot)=f_2(\cdot), \quad \forall t\in[1-\delta, 1].$$

因为 H 在 $([0,\delta]\times M)\cup([1-\delta, 1]\times M)$ 与 S 横截，根据横截扩张定理，存在光滑映射 $F: I\times M\to N$，使得

(i) $F(t, x)=H(t, x), \quad \forall t\in[0, \delta]\cup[1-\delta, 1], x\in M$;

(ii) $F \pitchfork S$.

根据引理 1.2，对于 $X=I\times M$ 我们有

$$I_2(\partial F, S)=0. \tag{1.1}$$

因为 $\partial F|(0\times M)=f_1$, $\partial F|(1\times M)=f_2$，所以 (1.1) 可以写成

$$I_2(f_1, S)+I_2(f_2, S)=0 \pmod 2).$$

由此得知

$$I_2(f_1, S)=I_2(f_2, S). \qquad \square$$

1.4 引理 设 $f\in C^0(M, N)$，则存在 $f_1\in C^\infty(M, N)$，使得

$$f_1\sim f, \quad f_1 \pitchfork S.$$

证明 先取光滑映射 $f_0\sim f$，然后根据横截逼近定理确认存在适合要求的 $f_1\in C^\infty(M, N)$. $\square$

1.5 定义 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，S 是 N 的闭正则子流形，$\dim M+\dim S=\dim N$, $f\in C^0(M, N)$，并设 $f_1\in C^\infty(M,N)$ 适合条件

$$f_1\sim f, \quad f_1 \pitchfork S.$$

我们把 f 与 S 的模 2 相交数定义为

$$I_2(f, S) := I_2(f_1, S).$$

1.6 命题 定义 1.5 确当无歧义，并且所定义的 $I_2(f, S)$ 关于 f 是同伦不变的．

证明 可仿照第八章命题 1.6 作出证明． □

§2 定向相交数

2.1 引理 设 $r \geq 1$，并设

(a) X 是 $1+m$ 维定向带边 C^r 流形；

(b) Y 是 $s+m$ 维定向无边 C^r 流形，S 是 Y 的定向的正则 s 维子流形，且 S 是 Y 的闭子集；

(c) $F \in C^r(X, Y)$ 适合条件

$$F \pitchfork S, \quad \partial F \pitchfork S;$$

(d) $Z = F^{-1}(S)$ 是 X 中的紧致集．

则存在一族覆盖了 S 且关于 S 正则的 Y 的正向局部坐标图卡 $\{(V, \psi)\}$ 和有限个覆盖了 Z 的 X 的正向局部坐标图卡 $\{(U, \varphi)\}$，其中

$$\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \cdots, \varphi^m),$$

使得

(0) 各 ψ 的前 s 个分量是 S 的正向局部坐标；

(1) 在点 $p \in Z = F^{-1}(S)$ 和点 $q = F(p)$ 邻近，分别有如上所述的适当的 φ 和 ψ，使得 F 的局部表示成为

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u^0, u^1, \cdots, u^m) = (\eta^1(u), \cdots, \eta^s(u), u^1, \cdots, u^m),$$

这里 $u = (u^0, u^1, \cdots, u^m)$；

(2) $\{(U \cap Z, \varphi^0|Z)\}$ 是 Z 的一个定向的 C^r 图汇；

(3) $Z \cap \partial X$ 由偶数个点组成；恰好在其中半数个点处，由 $(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于"内向型"诱导定向；而在另外半数个点处，由 $(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于"外向型"诱导定向．（在 Z 的每个同胚于 $[0, 1]$ 的连通分支的两端，由 $(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于不同类型的诱导定向．）

证明 (0) 首先，选取一族覆盖了 S 且关于 S 正则的 Y 的正向局部坐标图卡$\{(V,\psi)\}$. 必要时改变 ψ 的第一个坐标轴和最后一个坐标轴的方向，总能使得 ψ 的前面 s 个分量成为 S 的正向局部坐标.

(1) 考察集合族$\{F^{-1}(V)\}$，其中$\{V\}$是(0)项中所述的那些局部坐标域. 我们可以选取有限个 X 的正向局部坐标图卡$\{(U,\varphi)\}$，使得相应的局部坐标域族$\{U\}$从属于$\{F^{-1}(V)\}$，并且使得$\{U\}$覆盖了紧致集 $Z=F^{-1}(S)$，还使得 F 的相应的局部表示成为横截的典范局部表示(参看第五章的命题 2.4):

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(u^0,u^1,\cdots,u^m)=(\eta^1(u),\cdots,\eta^s(u),u^1,\cdots,u^m),$$

这里 $u=(u^0,u^1,\cdots,u^m)$.

(2) 考察流形 X 在点 $p\in Z$ 邻近的任意两个满足(1)中要求的正向局部坐标系$(u^0,u^1,\cdots,u^m)$和$(w^0,u^1,\cdots,u^m)$. 因为

$$\frac{\partial(w^0,u^1,\cdots,u^m)}{\partial(u^0,u^1,\cdots,u^m)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial w^0}{\partial u^0} & * \\ 0 & \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix}\end{vmatrix}>0,$$

所以

$$\frac{\partial w^0}{\partial u^0}>0.$$

可见，所述各坐标系的 φ^0 坐标给出 Z 的一个定向 C^r 图汇.

(3) Z 是紧致的 1 维微分流形. 它的每个连通分支微分同胚于$[0,1]$或者 S^1. 因而 $\partial Z=Z\cap\partial X$ 由偶数个点组成. 考察 Z 的一个确定的$[0,1]$型连通分支. 我们可以选取 $t\in[0,1]$ 作为该分支的参数. 如果在参数 $t=0$ 处有 $\dfrac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t}>0$，那么沿整条参数曲线都有

同样的情形．不妨设在 $t=0$ 处有 $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t}>0$（相反的情形可类似地加以讨论）．则在参数曲线的“0”端点，由 $(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于“内向型”诱导定向；而在参数曲线的“1”端点处，由（另一图卡的）$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于“外向型”诱导定向． □

2.2 注记 引理 2.1 对以后的讨论有重要意义．下面列出的关键事项（Ⅰ）和（Ⅱ）尤其值得注意（符号及假设条件均如引理 2.1）：

（Ⅰ）在点 $p\in Z\cap\partial X$ 邻近，对于所选择的坐标 $\varphi=(\varphi^0,\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$，约定记

$$\partial\varphi=(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)|\partial X,\quad f=\partial F=F\,\partial X,\quad \widetilde{f}=\psi\circ f\circ(\partial\varphi)^{-1}.$$

则有（约定记 $\widetilde{u}=(0,u^1,\cdots,u^m)$）

$$\widetilde{f}(u^1,\cdots,u^m)=(\eta^1(\widetilde{u}),\cdots,\eta^s(\widetilde{u}),u^1,\cdots,u^m),$$

$$\pi''\circ\widetilde{f}(u^1,\cdots,u^m)=(u^1,\cdots,u^m).$$

于是，在 p 点计算 $\pi''\circ\widetilde{f}$ 的 Jacobi 行列式可得 $J(\pi''\circ\widetilde{f})=1$．

（Ⅱ）虽然 φ 是 X 的正向局部坐标，但 $\partial\varphi$ 的正向未必与 ∂X 的正向一致．可以确认的事实是：在 $Z\cap\partial X$ 的各点，$\partial\varphi$ 的定向恰好是 1 维流形 Z 定向的“补定向”．注意到这一关键事实，在以后的讨论中，不论 ∂X 的正向怎样选择，我们都能参照具体情况，得出相应的结论．

2.3 一般约定 设 M 和 N 是定向光滑流形，S 是 N 的定向的正则子流形，并且

$$\dim M+\dim S=\dim N. \tag{2.1}$$

又设 $f\in C^\infty(M,N)$，$p\in f^{-1}(S)$，并且

$$f\pitchfork_p S. \tag{2.2}$$

选择 N 在 $q=f(p)$ 点邻近的关于 S 正则的正向局部坐标图卡 (Q,ψ)，要求 ψ 的前 s 个分量是 S 的正向局部坐标系．我们约定把这样的 (Q,ψ) 称做“好”的局部坐标图卡．

设 $\pi'': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-s}$ 是从 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ 到后一因子空间 $\mathbb{R}^{n-s}$ 的标准投影．由 (2.1) 和 (2.2) 可知：$\pi'' \circ \psi \circ f$ 在 p 点邻近是局部光滑同胚．因而可定义

$$\operatorname{Sgn}(\pi'' \circ \psi \circ f)_{*,p}. \tag{2.3}$$

2.4 引理 (2.3) 与"好"的局部坐标图卡 (Q, ψ) 的选取无关．

证明 设 ψ 和 ω 是 $q=f(p)$ 点邻近的两个好的局部坐标映射．我们来考察坐标变换 $z=\omega \circ \psi^{-1}(y)$．因为 ψ 和 ω 都是关于 S 正则的局部坐标系，所以 $z(y)=\omega \circ \psi^{-1}(y)$ 应使得

$$\begin{cases} z_{s+1}(y_1, \cdots, y_s, 0, \cdots, 0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ z_{s+m}(y_1, \cdots, y_s, 0, \cdots, 0)=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

又因为 ψ 和 ω 都是 N 的正向的局部坐标映射，所以在 $(y_{s+1}, \cdots, y_{s+m})=(0, \cdots, 0)$ 的地方有

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_s} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_{s+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial z_s}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_s}{\partial y_s} & \dfrac{\partial z_s}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial z_s}{\partial y_{s+m}} \\ \hline & & & \dfrac{\partial z_{s+1}}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial z_{s+1}}{\partial y_{s+m}} \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \dfrac{\partial z_{s+m}}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \dfrac{\partial z_{s+m}}{\partial y_{s+m}} \end{array}\right| > 0.$$

又因为 $(y_1, \cdots, y_s)$ 与 $(z_1, \cdots, z_s)$ 都是 S 的正向局部坐标，所以

$$\frac{\partial(z_1, \cdots, z_s)}{\partial(y_1, \cdots, y_s)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial z_s}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_s}{\partial y_s} \end{vmatrix} > 0.$$

由上面两个关于行列式的不等式立即可得

$$\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})}>0. \tag{2.5}$$

设 $p\in f^{-1}(S)$ 使得 $f\pitchfork_p S$. 为了比较 $\mathrm{Sgn}(\pi''\circ\psi\circ f)_{*,p}$ 和 $\mathrm{Sgn}(\pi''\circ\omega\circ f)_{*,p}$, 我们选取 M 在 p 点邻近的正向局部坐标图卡 (U,φ), 并记

$$g=\psi\circ f\circ\varphi^{-1},\quad h=\omega\circ f\circ\varphi^{-1}.$$

然后考察 $y=g(x)$ 与 $z=h(x)$ 之间的关系. 由 (2.4) 可知

$$\frac{\partial z_{s+i}}{\partial y_j}(y_1,\cdots,y_s,0,\cdots,0)=0\quad (i=1,\cdots,m;\quad j=1,\cdots,s).$$

因此

$$\frac{\partial z_{s+i}}{\partial x_k}=\sum_{j=1}^{s+m}\frac{\partial z_{s+i}}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_k}=\sum_{j=s+1}^{s+m}\frac{\partial z_{s+i}}{\partial y_j}\cdot\frac{\partial y_j}{\partial x_k}.$$

由此得到

$$\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}=\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})}\cdot\frac{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}. \tag{2.6}$$

由 (2.5) 和 (2.6) 可知

$$\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}\quad 与\quad \frac{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}$$

的符号相同. 我们证明了:

$$\mathrm{Sgn}(\pi''\circ\psi\circ f)_{*,p}=\mathrm{Sgn}(\pi''\circ\omega\circ f)_{*,p}.\qquad\square$$

2.5 记号约定 我们约定把如上所述的 $\mathrm{Sgn}(\pi''\circ\psi\circ f)_{*,p}$ 叫做 f 与 S 在 p 点的相交符号, 并简记为

$$\mathrm{Sgn}(f,S)_p.$$

2.6 定义 设 M 是紧致的定向光滑流形, N 是定向光滑流形, S 是 N 的定向的正则子流形, 并且 $\dim M+\dim S=\dim N$. 又设 $f: M\to N$ 是光滑映射, 适合条件

$$f\pitchfork S.$$

我们把 f 与 S 的相交数定义为

$$I(f,S) := \sum_{p \in f^{-1}(S)} \mathrm{Sgn}(f,S)_p.$$

对于 M 也是 N 的正则子流形(且与 S 横截)的特殊情形,我们约定把 M 与 S 的相交数定义为

$$I(M,S) := I(i,S),$$

其中 $i: M \to N$ 是放入映射.

在下面的讨论中,我们设 M 是紧致的定向光滑流形,N 是定向光滑流形,S 是 N 的闭的定向正则子流形,并且

$$\dim M + \dim S = \dim N.$$

2.7 引理 设存在定向的紧致光滑带边流形 X 使得 $\partial X = M$,并且 $\partial X = M$ 的各连通分支赋有统一的诱导定向(或者都是"外向型"的,或者都是"内向型"的). 如果 $F \in C^\infty(X,N)$ 适合条件

$$F \pitchfork S, \quad \partial F \pitchfork S,$$

那么 $f = \partial F$ 与 S 的相交数是 0, 即: $I(f,S) = 0$.

证明 容易获知: $Z = F^{-1}(S)$ 是紧致的 1 维光滑流形. 根据引理 2.1, 在 Z 的每个同胚于 $[0,1]$ 的连通分支的两个端点处, f 与 S 的相交符号恰好分别为 $+1$ 和 -1. 因此 $I(f,S) = 0$. □

2.8 引理 设 $f_i \in C^\infty(M,N)$ $(i=1,2)$ 适合条件

$$f_1 \pitchfork S, \quad f_2 \pitchfork S.$$

如果 $f_1 \sim f_2$ (C^0 同伦), 那么

$$I(f_1,S) = I(f_2,S).$$

证明 留给读者(可仿照第九章的引理 2.3 进行证明). □

2.9 定义 设 M 是定向的紧致光滑流形,N 是定向的光滑流形,S 是 N 的闭的定向的正则子流形,并且 $\dim M + \dim S = \dim N$. 对于 $f \in C^0(M,N)$, 我们选取 $f_1 \in C^\infty(M,N)$ 满足这样的条件:

$$f_1 \sim f, \quad f_1 \pitchfork S,$$

然后定义

$$I(f,S) := I(f_1,S).$$

2.10 命题 定义 2.9 确当无歧义,并且所定义的 $I(f,S)$ 关于 f

的同伦是不变的．

§3　相交数定义的局部化

仿照第十章§1的讨论，我们来定义局部相交数．

3.1　一般约定　设 M 和 N 是定向光滑流形，S 是 N 的闭的定向的正则子流形，并且

$$\dim M+\dim S=\dim N.$$

设 Ω 是 M 的一个开子集，$\overline{\Omega}$ 是紧致集．我们约定记 $\partial\Omega=\overline{\Omega}\backslash\Omega$.

3.2　定义　如果 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega)\cap S=\varnothing,\quad f\pitchfork_\Omega S,$$

那么 $\Omega\cap f^{-1}(S)$ 是紧致的0维流形（或者 $\varnothing$），因而是有限点集．我们将 f 在 Ω 上与 S 的相交数定义为

$$I(f,\Omega,S):=\sum_{p\in\Omega\cap f^{-1}(S)}\mathrm{Sgn}(f,S)_p.$$

3.3　引理　设 M,N,S,Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定3.1中所述，并设

$$f_i\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)\quad(i=0,1)$$

适合条件

$$f_i(\partial\Omega)\cap S=\varnothing,\quad f_i\pitchfork_\Omega S,\quad i=0,1.$$

如果存在同伦 $H:f_0\sim f_1$，使得

$$H(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing,$$

那么

$$I(f_0,\Omega,S)=I(f_1,\Omega,S).$$

证明　可仿照第十章引理1.3作出本引理的证明（留作练习）．　□

3.4　引理　设 M,N,S,Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定3.1中所述，并设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega)\cap S=\varnothing.$$

则存在 $f_0\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ 和 $H\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$，使得

(1) $f_0\pitchfork_\Omega S$;

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot)$, $H(1,\cdot)=f(\cdot)$;

(3) $H(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing$.

证明 将 N 光滑地嵌入到 $\mathbb{R}^k$ 之中. 约定将 $\mathbb{R}^k$ 的范数和距离函数分别记为 $\|\cdot\|$ 和 d. 设 Γ 是 N 在 $\mathbb{R}^k$ 中的管状邻域, 并设

$$\gamma: \Gamma\to N$$

是相应的管状投影(管状收缩映射). 于是存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\{y\in\mathbb{R}^k \mid d(y,f(\overline{\Omega}))<\varepsilon\}\subset\Gamma.$$

因为 $f(\partial\Omega)\cap S=\varnothing$ 且 $f(\partial\Omega)\subset N$, 所以 $f(\partial\Omega)\cap\gamma^{-1}(S)=\varnothing$. 因而存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$, 使得

$$d(f(\partial\Omega),\gamma^{-1}(S))>2\delta.$$

根据 Tietze 扩充定理, 不妨设连续映射 $f:\overline{\Omega}\to N\subset\mathbb{R}^k$ 已扩充为 $f\in C^0(M,\mathbb{R}^k)$. 选取 f 的光滑逼近 $g\in C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$, 使得

$$g \pitchfork \gamma^{-1}(S),\quad \|g(x)-f(x)\|<\delta,\quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

然后定义

$$G: I\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^k,$$
$$(t,x)\mapsto f(x)+(1-t)(g(x)-f(x)).$$

容易看到:

$$g(\overline{\Omega})\subset\Gamma,\quad G(I\times\overline{\Omega})\subset\Gamma,$$
$$G(I\times\partial\Omega)\cap\gamma^{-1}(S)=\varnothing.$$

我们取 $$f_0=\gamma\circ g,\quad H=\gamma\circ G.$$

则容易验证: 这样定义的 f_0 和 H 能够满足引理的全部要求. □

3.5 定义 设 M, N, S, Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定 3.1 中所述, 并设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega)\cap S=\varnothing.$$

我们选取 $f_0\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ 和 $H\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$, 适合这样的要求:

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega S$;

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot)$, $H(1,\cdot)=f(\cdot)$;

(3) $H(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing$.

然后，我们定义

$$I(f,\Omega,S):=I(f_0,\Omega,S).$$

§4 向量丛截面的光滑化与横截逼近

设$(E,M,\pi,\mathbb{R}^k)$是一个光滑向量丛，$\sigma: M\to E$是一个连续截面．将σ看成连续映射当然可以引用映射的光滑化定理．但这样得到的光滑映射$\tilde{\sigma}$不一定仍是截面，即不一定满足条件

$$\pi\circ\tilde{\sigma}=\mathrm{id}.$$

(横截逼近定理应用于截面情形也会产生类似的问题．)我们有必要适当地修改映射的光滑化定理(横截逼近定理)，使得修改后的定理能适用于截面的情形．

4.1 定理 设$(E,M,\pi,\mathbb{R}^k)$是光滑的向量丛，在其上取定了一个Riemann度量；$\sigma: M\to E$是一个连续截面；ε是正实数．则存在光滑截面$\sigma_0: M\to E$，使得

$$\|\sigma_0(x)-\sigma(x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in M.$$

这里$\|\cdot\|$是由Riemann度量决定的范数．

证明 局部看来，σ可以表示成$(x,s(x))$．我们可以用光滑的$s_0(x)$逼近$s(x)$．于是，在局部范围内，截面$(x,s(x))$可以被光滑截面$(x,s_0(x))$任意逼近．

仿照"映射的光滑化定理"证明中从局部过渡到全局的做法，就可以顺利地完成本定理的证明． □

对于光滑向量丛$(E,M,\pi,\mathbb{R}^k)$，我们以E_0表示其零截面子流形．

4.2 定理 设M是光滑流形，$E=TM$是M的切丛，$\sigma: M\to E$是光滑截面，ε是正实数．则存在光滑截面σ_1，使得

$$\sigma_1\pitchfork E_0;\quad \|\sigma_1(x)-\sigma(x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in M,$$

这里$\|\cdot\|$是由TM的Riemann度量决定的范数．

证明 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，$\xi(x)$ 是定义于 U 上的光滑向量场，则 $(x, \xi(x))$ 与 $TU=U\times\mathbb{R}^m$ 的零截面横截的充分必要条件是：$\xi(x)$ 以 $0\in\mathbb{R}^m$ 为正则值．对于给定的光滑截面 $(x, s(x))$，我们可以选取 $s(x)$ 的足够小的正则值 c，然后构造

$$s_1(x)=s(x)-c.$$

因为 0 是 $s_1(x)$ 的正则值，所以 $(x, s_1(x))$ 与 $TU=U\times\mathbb{R}^m$ 的零截面 $U\times 0$ 横截．

在以上局部结果的基础上，仿照"横截逼近定理"证明中从局部过渡到全局的作法，就可完成本定理的证明． □

§5 向量场孤立零点的指标

设 G 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集，则 $TG=G\times\mathbb{R}^m$．定义于 G 上的 C^s 向量场（即 TG 的 C^s 截面）具有这样的形式

$$(x, V(x)), \quad x\in G,$$

其中的 $V: G\to\mathbb{R}^m$ 是 C^s 映射．对这种情形，通常就说：V 是定义于 G 上的 C^s 向量场．

设 p 是 V 的一个孤立零点，即 $V(p)=0$ 且存在 p 点的一个开邻域 U，使得

$$V(q)\neq 0, \quad \forall q\in U\setminus\{p\}.$$

取以 p 点为中心，$\varepsilon>0$ 为半径的一个小球面 $S_{p,\varepsilon}$，使得

$$S_{p,\varepsilon}\subset U, \tag{5.1}$$

则可讨论 $V|S_{p,\varepsilon}$ 对 $0\in\mathbb{R}^m$ 的环绕数

$$W(V|S_{p,\varepsilon}, 0). \tag{5.2}$$

下面的引理指出：(5.2) 实际上不依赖于小正数 ε 的选取．

5.1 引理 设 $\varepsilon'>\varepsilon>0$ 并且 ε' 和 ε 都满足 (5.1) 的要求，则

$$W(V|S_{p,\varepsilon'}, 0)=W(V|S_{p,\varepsilon}, 0).$$

证明 约定将 $\mathbb{R}^m$ 中以 p 点为中心，ε 为半径的闭实心球体记为 $D_{p,\varepsilon}$．因为 V 在紧致集 $X=D_{p,\varepsilon'}\setminus\operatorname{int}D_{p,\varepsilon}$ 上没有零点，所以存在

$\delta>0$, 使得

(5.3) $$\|V(x)\|>2\delta, \quad \forall x\in X.$$

我们可以选取光滑向量场$\widetilde{V}$, 使得

(5.4) $$\|\widetilde{V}(x)-V(x)\|<\delta, \quad \forall x\in X.$$

因为$\widetilde{V}$在X上不取零值, 所以$W(\widetilde{V}|\partial X,0)=0$. 由此得到

(5.5) $$W(\widetilde{V}|S_{p,\varepsilon'},0)=W(\widetilde{V}|S_{p,\varepsilon},0).$$

我们记

$$H(t,x)=V(x)+t(\widetilde{V}(x)-V(x)).$$

则由(5.3)和(5.4)可知

$$H(t,x)\neq 0, \quad \forall t\in I,\ x\in X;$$

并且显然有

$$H(0,\cdot)=V(\cdot), \quad H(1,\cdot)=\widetilde{V}(\cdot).$$

因而由(5.5)就可得到引理的结论. □

有了引理 5.1, 对最简单的情形已经可以定义向量场孤立零点的指标.

5.2 定义 设G是$\mathbb{R}^m$中的开集, V是定义于G上的连续向量场, $p\in G$是V的孤立零点. 取足够小的$\varepsilon>0$, 使得闭球体$D_{p,\varepsilon}\subset G$并且$V$在$D_{p,\varepsilon}$上除$p$而外别无零点. 我们将$V$在$p$点的指标定义为

$$\mathrm{ind}_p V:=W(V|S_{p,\varepsilon},0).$$

下面的任务是: 对于定向光滑流形M上的向量场, 定义其关于孤立零点的指标.

设M是一个定向光滑流形, σ是M上的一个C^s向量场($s\geqslant 0$), $p\in M$是σ的一个孤立零点. 于是, $\sigma(p)=0$, 并且存在p点的一个开邻域Ω, 使得

$$\sigma(q)\neq 0, \quad \forall q\in\overline{\Omega}\setminus\{p\}.$$

必要时适当缩小Ω, 不妨设$\overline{\Omega}$包含在M的一个局部坐标域U之中并且$\overline{\Omega}$是紧致集. 设φ是定义于U的正向局部坐标映射, 并设

$$\Phi: T_U M\to\varphi(U)\times\mathbb{R}^m$$

是由φ诱导的切丛TM的局部平凡化映射. 则(参看图 27)向量

场 σ 可局部表示为:

$$\Phi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}(x)=(x,V(x)).$$

不失一般性,可设 $\varphi(p)=0$. 因为 $V(x)$ 在 $\varphi(\overline{\Omega})$ 中以 $\varphi(p)=0$ 为唯一零点,所以可定义关于该孤立零点的指标 $\mathrm{ind}_0V(x)$.

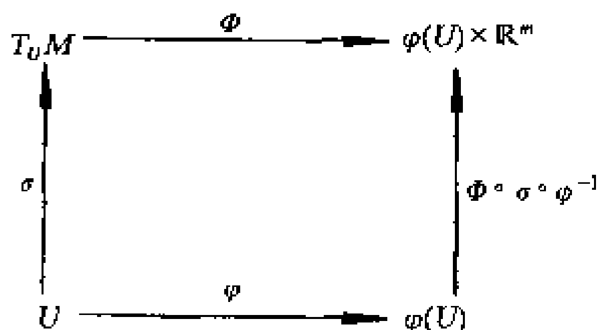


图 27

5.3 引理 上面所述的 ind_0V 实际上与符合定向要求的局部坐标 φ 的选取无关.

证明 首先指出一个很容易验证的公式: 设 Δ 是 M 的开集, $\psi:\Delta\to D=\psi(\Delta)$ 是保持定向的光滑同胚,则有

(5.6) $$\deg(f,\Delta,q)=\deg(f\circ\psi^{-1},\psi(\Delta),q).$$

(参看图 28.)

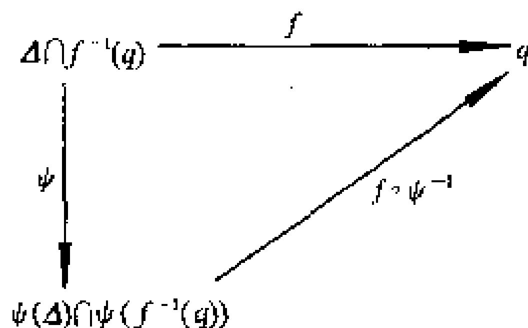


图 28

下面,我们来证明引理. 设 (U,φ) 是 p 点邻近的一个正向局部坐标图卡,适合条件 $\varphi(p)=0$. 设 Ω 是 p 点的一个开邻域, $\overline{\Omega}\subset U$, $\overline{\Omega}$ 是紧致集,并且

$$\sigma(q)\neq 0,\quad \forall q\in\overline{\Omega}\setminus\{p\}.$$

于是可取足够小的 $\varepsilon>0$, 使 m 维闭球体 $D_\varepsilon=D_{0,\varepsilon}\subset\varphi(\Omega)$. 对于紧致集 $K=\overline{\Omega}\setminus\varphi^{-1}(\operatorname{int}D_\varepsilon)$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\|\sigma(q)\|>2\delta,\quad \forall q\in K.$$

选取逼近 σ 的光滑截面 σ_1, 使得

(1) $\sigma_1\pitchfork E_0$ (TM 的零截面);

(2) $\|\sigma_1(q)-\sigma(q)\|<\delta,\ \forall q\in K.$

我们定义

$$H(t,x)=\sigma(x)+t(\sigma_1(x)-\sigma(x)).$$

则显然 $H: I\times M\to TM$ 是从 σ 到 σ_1 的同伦, 并且

$$H(I\times K)\cap E_0=\varnothing.$$

设 σ 和 σ_1 分别局部表示成 $(x, V(x))$ 和 $(x, V_1(x))$, 并设 $S_\varepsilon=\partial D_\varepsilon$, 则有(推导中对于 $\Delta=\varphi^{-1}(D_\varepsilon)$ 和 $D=D_\varepsilon$ 用到公式(5.6))

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}_0V&=W(V|S_\varepsilon,0)=W(V_1|S_\varepsilon,0)=\deg(V_1,D_\varepsilon,0)\\&=\deg(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1\circ\varphi^{-1},\ D_\varepsilon,\ 0)\\&=\deg(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1,\ \varphi^{-1}(D_\varepsilon),\ 0)\\&=\deg(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1,\ \Omega,\ 0)\\&=\sum_{\substack{\sigma_1(z)=0\\ z\in\Omega}}\operatorname{Sgn}(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1)_{*,z}\\&=\sum_{\substack{\sigma_1(z)=0\\ z\in\Omega}}\operatorname{Sgn}(\sigma_1,E_0)_z=I(\sigma_1,\Omega,E_0)=I(\sigma,\Omega,E_0).\end{aligned}$$

最后一个量显然与符合定向要求的局部坐标的选取无关. □

5.4 定义 设 M 是一个定向光滑流形, σ 是 M 上的 C^0 向量场(即 TM 的 C^0 截面), $p\in M$ 是 σ 的孤立零点. 任取 M 在 p 点邻近的正向局部坐标图卡 (U,φ), 不妨设 $\varphi(p)=0$. 将 φ 所诱导的切丛 TM 的局部平凡化映射记为 Φ. 则 σ 局部表示为

$$\Phi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}(x)=(x, V(x)),$$

其中 $V: U\to\mathbb{R}^m$ 是连续映射. 我们定义

$$\operatorname{ind}_p\sigma:=\operatorname{ind}_0V.$$

§6 Poincaré-Hopf 定理

6.1 定义 设 M 是紧致的定向光滑流形，E_0 是切丛 TM 的零截面子流形．我们约定把

$$\chi(M) := I(E_0, E_0)$$

叫做流形 M 的 Euler 示性数．

6.2 定理 设 M 是一个紧致的定向光滑流形，E_0 是切丛 TM 的零截面子流形，σ 是 M 上的一个横截于 E_0 的光滑向量场(即 TM 的一个与 E_0 横截的 C^∞ 截面)，并设 $p_1, \cdots, p_k$ 是 σ 的零点(当然都是孤立的)，则

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \chi(M).$$

证明 取各孤立零点 p_i 的足够小的开邻域 Ω_i，满足上节所述的要求．不妨设所选取的 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ 两两不相交．在引理 5.3 中已经证明 $\operatorname{ind}_{p_i}\sigma = I(\sigma, \Omega_i, E_0)$．因而

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \sum_{i=1}^{k} I(\sigma, \Omega_i, E_0) = I(\sigma, E_0).$$

切丛 TM 的任意两个截面 σ 与 τ 之间可定义同伦

$$H(t, x) = (1-t)\sigma(x) + t\tau(x).$$

特别地，σ 同伦于零截面．因此 $I(\sigma, E_0) = I(E_0, E_0) = \chi(M)$．这样，我们证明了

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \chi(M). \qquad \square$$

对于只有孤立零点的连续向量场也有类似的结果．

6.3 定理(Poincaré-Hopf 定理) 设 M 是紧致的定向光滑流形，σ 是 M 上连续的只有孤立零点的切向量场，$p_1, \cdots, p_k$ 是 σ 的所有的孤立零点，则

$$\sum_{i=1}^{k}\operatorname{ind}_{p_i}\sigma=\chi(M).$$

证明 取 p_i 的开邻域 Ω_i，使得 σ 在 Ω_i 中除了 p_i 之外别无零点 $(i=1,\cdots,k)$．我们记

$$K=M\setminus\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i. \tag{6.1}$$

因为 σ 在 K 上没有零点，所以存在 $\delta>0$，使得

$$\|\sigma(x)\|\geqslant 2\delta,\quad \forall x\in K. \tag{6.2}$$

设 E_0 是切丛 $E=TM$ 的零截面子流形．选取切丛 E 的横截于 E_0 的光滑截面 $\widetilde{\sigma}$，使得

$$\|\widetilde{\sigma}(x)-\sigma(x)\|<\delta,\quad \forall x\in K. \tag{6.3}$$

值得注意的是：虽然 σ 在 Ω_i 中恰有一个零点 p_i，其光滑逼近 $\widetilde{\sigma}$ 在 Ω_i 中却可能会有较多的零点，也可能会没有一个零点．(形象的说法是：σ 的孤立零点经过"扰动"之后可能会"分裂"成几个零点，也可能会"消失"．) 但据 (6.2) 和 (6.3) 可知，从 σ 到 $\widetilde{\sigma}$ 的同伦

$$H(t,x)=\sigma(x)+t(\widetilde{\sigma}(x)-\sigma(x))$$

适合条件 $H(I\times\partial\Omega_i)\cap E_0=\varnothing$．因而

$$\operatorname{ind}_{p_i}\sigma=I(\sigma,\Omega_i,E_0)=I(\widetilde{\sigma},\Omega_i,E_0). \tag{6.4}$$

对 (6.4) 式求和并注意 $\widetilde{\sigma}$ 在 $M\setminus\bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i$ 没有零点，我们得到

$$\sum_{i=1}^{k}\operatorname{ind}_{p_i}\sigma=\sum_{i=1}^{k}I(\widetilde{\sigma},\Omega_i,E_0)=I(\widetilde{\sigma},E_0)=I(E_0,E_0)=\chi(M).\qquad\square$$

由上面的讨论我们获悉：在所述条件下，流形 M 的任何只有孤立零点的切向量场，其零点的指标之和是一个由 M 决定的不变量．

下一步的任务是：说明我们这里所定义的 Euler 示性数与组合拓扑学中用其他方法定义的"Euler 示性数"其实是同一个东西．

6.4 引理 设 $\rho_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是由下式定义的映射

$$\rho_i(x^1, \cdots, x^{i-1}, x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^{i-1}, -x^i, x^{i+1}, \cdots, x^n).$$

则 $f_i = \rho_i | S^{n-1}$ 的映射度为 -1, 即

$$\deg(f_i) = -1.$$

证明 以 $f_1 = \rho_1 | S^{n-1}$ 为例写出证明. 点 $(-1, 0, \cdots, 0)$ 是光滑映射 f_1 的正则值, 唯一的原像点是 $(1, 0, \cdots, 0)$. 若在这两点邻近以 $(x^2, \cdots, x^n)$ 为局部坐标, 即以向相应坐标面的投影作为局部坐标映射, 则 f_1 的局部表示是该坐标平面上的恒同映射. 依照 S^{n-1} 的外法线诱导定向, 在点 $(1, 0, \cdots, 0)$ 处, 坐标 $(x^2, \cdots, x^n)$ 是正向的; 而在点 $(-1, 0, \cdots, 0)$ 处, 坐标 $(x^2, \cdots, x^n)$ 是负向的. 若在后一点邻近将坐标换成正向的局部坐标, 则 f_1 的局部表示 $\widetilde{f}_1$ 的 Jacobi 行列式改变成负值, 因而

$$\deg(f_1) = -1. \qquad \square$$

6.5 引理 设映射 $\Gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义为

$$\Gamma = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \cdots \circ \rho_1,$$

其中的 ρ_i 是如引理 6.4 中所述的映射. 则对于 $\varepsilon \in (0, 1]$ 有

$$W(\Gamma | S_\varepsilon^{n-1}, 0) = (-1)^k.$$

证明 因为 Γ 在 $D_1 \backslash (\mathrm{int}\, D_\varepsilon)$ 中不取 0 值, 所以

$$W(\Gamma | S_\varepsilon^{n-1}, 0) = W(\Gamma | S_1^{n-1}, 0).$$

我们记

$$f = \Gamma | S_1^{n-1}: S_1^{n-1} \to S_1^{n-1}.$$

因为

$$f = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1,$$

其中

$$f_i = \rho_i | S_1^{n-1}, \quad i = 1, \cdots, k.$$

所以

$$W(\Gamma | S_\varepsilon^{n-1}, 0) = W(\Gamma | S_1^{n-1}, 0) = \deg(f) = (-1)^k. \qquad \square$$

6.6 引理 设 Ω 是 $\mathbb{R}^m$ 中原点 0 的一个开邻域, V 和 Γ 是定义于 Ω 上的以原点 0 为孤立零点的 C^0 向量场. 如果

$$\frac{V(x)}{\|V(x)\|} \neq -\frac{\Gamma(x)}{\|\Gamma(x)\|}, \quad \forall x \in \Omega \backslash 0,$$

那么 $$\operatorname{ind}_0 V=\operatorname{ind}_0 \Gamma.$$
特别地，考察这样一个向量场
$$\Gamma_k(x)=\rho_k\circ\rho_{k-1}\circ\cdots\circ\rho_1(x),$$
其中 $\rho_i(i=1,\cdots,k)$ 如引理 6.4 所述．如果
$$\frac{V(x)}{\|V(x)\|}\neq-\frac{\Gamma_k(x)}{\|\Gamma_k(x)\|},\quad\forall x\in\Omega\backslash 0,$$
那么 $$\operatorname{ind}_0 V=(-1)^k.$$

证明 取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 V 和 Γ 在 $D_\varepsilon\backslash 0$ 中无零点．在 S_ε 上，我们定义
$$f(x)=\frac{V(x)}{\|V(x)\|},\quad g(x)=\frac{\Gamma(x)}{\|\Gamma(x)\|}.$$
则有
$$\operatorname{ind}_0 V=W(V|S_\varepsilon,0)=\deg(f),\quad \operatorname{ind}_0\Gamma=W(\Gamma|S_\varepsilon,0)=\deg(g).$$
因为 $f,g:S_\varepsilon\to S_1$ 适合条件
$$f(x)\neq-g(x),\quad\forall x\in S_\varepsilon,$$
所以 f 与 g 同伦．由此得知
$$\operatorname{ind}_0 V=\deg(f)=\deg(g)=\operatorname{ind}_0\Gamma.\qquad\square$$

在前面的讨论中，对于紧致的定向光滑流形 M，我们将其 Euler 示性数 $\chi(M)$ 定义为切丛 TM 的零截面 E_0 的自相交数：
$$\chi(M)=I(E_0,E_0).$$
定理 6.3 指出，切丛 TM 的任何一个只有孤立零点的 C^0 截面，其所有的零点的指标之和恰好等于 $\chi(M)=I(E_0,E_0)$．下面，我们将具体地构造一个只有孤立零点的切向量场，该向量场的所有的零点的指标之和正好与组合拓扑学中借助于单纯剖分所定义的“Euler 示性数”相等．这样也就证明了从不同的角度作出的 Euler 示性数的两种定义实际上是一致的．

为此，首先需要介绍下面的定义 6.7．

对于(有限)单纯复合形 K，约定将相应的多面体记为[K]．

6.7 定义 设 M 是紧致光滑流形，K 是一个(有限)单纯复合

形，$h:[K]\to M$ 是连续映射．我们称 (K,h) 是 M 的一个光滑的单纯剖分，倘若

(1) $h:[K]\to M$ 是 C^0 同胚；

(2) 对 K 的每个单形 σ，都有 $[\sigma]$ 所在"平面"(即仿射子空间)上的开集 $U\supset[\sigma]$，使得 $h|[\sigma]:[\sigma]\to M$ 可以扩充为从 U 到 M 的 C^∞ 嵌入．(以下将这样的开集记为 U_σ．)

我们需要引用一个重要定理：

6.8 定理 任何紧致的光滑流形都具有光滑的单纯剖分．

这一定理的证明过程比较长，涉及的技术细节比较多．有兴趣了解这定理证明的读者可以参看 Muncres 著，李培信译的《初等微分拓扑学》一书的第二章．

设紧致的定向光滑流形 M 已光滑地剖分为单纯复合形：$M=h([K])$．我们将首先在 K 的各单形体 $[\sigma]$ 上定义向量场，然后借助于嵌入映射 h，将 $[\sigma]$ 上的向量场移入 TM，这样作成 M 上的向量场．

(Ⅰ) 首先，在 K 的 0 维骨架 K^0 上(即全体顶点的集合上)规定向量场取 0 值：

$$V(x)=0,\quad \forall x\in K^0.$$

(Ⅱ) 假设在 K 的 s 维单形 Δ^s 的边界 $\partial\Delta^s$ 上已经定义好了 $V(x)$．设 c 是 Δ^s 的重心，π 是以 c 点为中心将 $\Delta^s\backslash\{c\}$ 投射到 $\partial\Delta^s$ 的中心投影映射，$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是单形 Δ^s 上的重心坐标．约定记

$$\eta(x)=(s+1)^{s+1}\lambda_0(x)\lambda_1(x)\cdots\lambda_s(x).$$

对于 $x\in\Delta^s\backslash\{c\}$，我们定义

$$V(x)=(1-\eta(x))^2V(\pi x)+\eta(x)(c-x).$$

此外，还定义 $V(c)=0$．(请注意：在邻近 c 点处，如果我们将 $V(x)$ 表达式的前一项 $(1-\eta(x))^2V(\pi x)$ 与后一项 $\eta(x)(c-x)$ 作比较，前一项是更高阶的无穷小量．)

用上面所说的办法，我们在 $M=h([K])$ 上定义了一个 C^0 向量场．该向量场的零点是 K 的各单形重心 c 的像点 $h(c)$，因而都是

孤立的(参看图 29).

设 c 是 K 的某个 s 维单形 Δ^s 的重心. 在 c 点邻近, $V(x)$ 沿着 s 维方向趋向 c, 沿着其余 $m-s$ 维方向远离 c. 根据引理 6.6 可知

$$\mathrm{ind}_c V=(-1)^s.$$

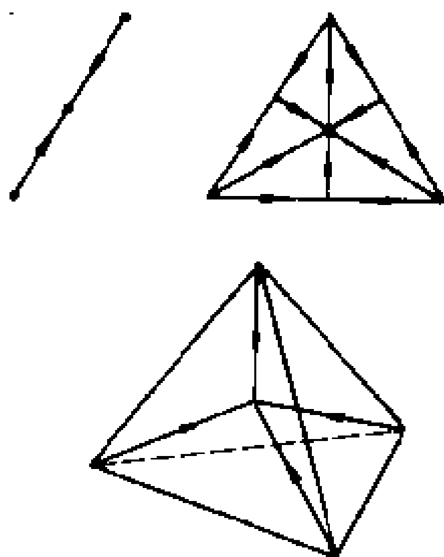


图 29

如果将 K 的 s 维单形的总数记为 N_s, 那么

$$I(E_0, E_0)=\sum \mathrm{ind}_c V=\sum_{s=0}^{m}(-1)^s N_s.$$

上式右端最后一个和数正好就是组合拓扑学中借助于单纯剖分所定义的"Euler 示性数".

练 习 K

K.1. 仿照第九章引理 2.3 完成本章引理 2.8 的证明.

K.2. 仿照第十章引理 1.3 完成本章引理 3.3 的证明.

K.3. 试构造 S^n 的光滑切向量场 Γ, 适合这样的条件: Γ 仅有两个零点 p 和 q, 并且 $\mathrm{ind}_p \Gamma=1$, $\mathrm{ind}_q \Gamma=(-1)^n$.

K.4. 试利用 Poincaré-Hopf 定理证明 $\chi(S^{2k-1})=0$, $\chi(S^{2k})=2$.

K.5. 试证 S^n 具有处处不为 0 的切向量场的充分必要条件是: $n=2k-1$.

K.6. 设 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$($n$ 个 S^1 的乘积流形), 试证 $\chi(T^n)=0$.

第十二章 映射度的积分表示与 Gauss-Bonnet 公式

作为本章的预备知识，需要了解外微分形式的积分与一般 Stokes 公式（请参看附录 δ）．我们约定以 $\Omega^k(M)$ 表示光滑流形 M 上的所有光滑的 k 次外微分形式组成的集合．

§1 映射度的积分表示

对于 $\omega\in\Omega^k(M)$，我们将 ω 的支集定义为

$$\mathrm{supp}\,\omega := \overline{\{x\in M \mid \omega\neq 0\}}.$$

若 $\mathrm{supp}\,\omega$ 是紧致的，则称 ω 为紧支（外微分）形式．$\Omega^k(M)$ 中由全体紧支形式组成的子集合记为 $\Omega_c^k(M)$．

1.1 引理 设 $\omega\in\Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ 满足条件

$$\int\omega=0,$$

则存在 $\rho\in\Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$，使得

$$\omega=\mathrm{d}\rho.$$

证明 用归纳法．对于 $n=1$ 的情形，$\omega\in\Omega_c^1(\mathbb{R}^1)$ 可以表示成 $\omega=g(x)\mathrm{d}x$，其中 $g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1)$．我们记

$$\rho(x)=\int_{-\infty}^{x} g(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $\int\omega=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x=0$，所以 ρ 是紧支光滑函数，即 $\rho\in$

$\Omega_c^0(\mathbb{R}^1)$. 显然有

$$\omega = g(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\rho.$$

假设对于 $n=m-1$ 的情形结论成立，考察 $n=m$ 的情形．我们将 $\omega\in\Omega_c^m(\mathbb{R}^m)$ 写成

$$\omega = g(x', x_m)\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_m,$$

这里

$$x' = (x_1, \cdots, x_{m-1}), \quad \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{m-1}.$$

然后定义

$$\widetilde{g}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x', x_m)\mathrm{d}x_m, \qquad \widetilde{\omega} = \widetilde{g}(x')\mathrm{d}x'.$$

显然 $\widetilde{\omega}\in\Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^{m-1})$ 并且满足条件

$$\int \widetilde{\omega} = \int \widetilde{g}(x')\mathrm{d}x' = \int \mathrm{d}x' \int_{-\infty}^{+\infty} g(x', x_m)\mathrm{d}x_m = \int \omega = 0.$$

根据归纳法假设，存在 $\widetilde{\rho}\in\Omega_c^{m-1}(\mathbb{R}^{m-1})$，使得 $\widetilde{\omega}=\mathrm{d}\widetilde{\rho}$．不妨将 $\widetilde{\rho}$ 写成

$$\widetilde{\rho} = \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\widetilde{h}_i(x')\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{m-1}$$

(其中 $\widehat{\mathrm{d}x_i}$ 表示不含 $\mathrm{d}x_i$)．于是

$$\widetilde{g}(x')\mathrm{d}x' = \widetilde{\omega} = \mathrm{d}\widetilde{\rho} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \widetilde{h}_i}{\partial x_i}(x')\right)\mathrm{d}x'.$$

由此可知

$$\widetilde{g}(x') = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \widetilde{h}_i}{\partial x_i}(x').$$

我们取 $k\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$，使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t)\mathrm{d}t = 1.$$

然后记

$$h_m(x', x_m) = \int_{-\infty}^{x_m} [g(x', t) - \tilde{g}(x') k(t)] \mathrm{d}t.$$

显然 h_m 是紧支光滑函数，并且

$$\frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x', x_m) = g(x', x_m) - \tilde{g}(x') k(x_m).$$

因而

$$g(x', x_m) = \tilde{g}(x') k(x_m) + \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x', x_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \tilde{h}_i(x')}{\partial x_i} k(x_m) + \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x', x_m).$$

若记

$$h_i(x', x_m) = \tilde{h}_i(x') k(x_m), \quad i = 1, \cdots, m-1,$$

则有

$$g(x', x_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i(x', x_m)}{\partial x_i}.$$

我们看到：

$$\omega = g(x', x_m) \mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_m = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i(x', x_m)}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_m = \mathrm{d}\rho,$$

其中

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} h_i(x) \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$$

是紧支的 $m-1$ 次外微分形式． □

约定 设 N 是光滑流形，$\dim N = n$．N 的开集 Q 被称为“标准”的坐标域，倘若存在 N 的局部坐标 (Q, ψ)，使得

$$\psi(Q) = \mathbb{R}^n.$$

外微分形式 $\omega \in \Omega^k(N)$ 被称为紧支于 Q 中的形式，倘若 $\mathrm{supp}\omega$ 是紧致集，并且

$$\operatorname{supp}\omega\subset Q.$$

1.2 引理 设 M 是定向的紧致光滑(无边)流形，N 是定向的光滑流形，并且 $\dim M=\dim N=n$. 又设 Q 是 N 的一个"标准"的坐标域，$\omega\in\Omega^n(N)$ 是紧支于 Q 中的外微分形式，满足条件

$$\int_N \omega=0. \tag{1.1}$$

则对任意的 $f\in C^\infty(M,N)$ 都有

$$\int_M f^*\omega=0.$$

证明 从条件(1.1)可知，存在 $\rho\in\Omega_c^{n-1}(Q)$，使得

$$\omega=\mathrm{d}\rho. \tag{1.2}$$

注意到 $\partial M=\varnothing$，由(1.2)可得

$$\int_M f^*\omega=\int_M f^*\mathrm{d}\rho=\int_M \mathrm{d}(f^*\rho)=\int_{\partial M} f^*\rho=0.$$

在上面的推导中，我们引用了一般的 Stokes 定理. □

1.3 推论 关于 M, N, Q 和 f 的假定如引理 1.2 中所述. 设 ω_1 和 ω_2 都是紧支于 Q 中的光滑的 n 次外微分形式. 如果

$$\int\omega_1=\int\omega_2,$$

那么

$$\int f^*\omega_1=\int f^*\omega_2.$$

约定 设 U 和 V 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 我们约定以 $\mathrm{Diff}(U,V)$ 表示从 U 到 V 的所有的微分同胚组成的集合.

1.4 引理 设 U 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，ω 是紧支于 V 中的 n 次外微分形式. 则对任意的 $f\in\mathrm{Diff}(U,V)$ 都有

$$\int_U f^*\omega=(\operatorname{sgn}J_f)\int_V\omega,$$

这里 $\operatorname{sgn}J_f$ 是 f 的 Jacobi 行列式的符号.

证明 可设 $\omega=g(y)\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n$. 根据微分形式的变换法则与重积分的变换公式,我们算出:

$$\begin{aligned}\int_U f^*\omega &= \int_U g(f(x))\,J_f(x)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\ &= \int_U g(f(x))\,J_f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\ &= (\mathrm{sgn}J_f)\int_U g(f(x))|J_f(x)|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\ &= (\mathrm{sgn}J_f)\int_V g(y)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n\\ &= (\mathrm{sgn}J_f)\int_V g(y)\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n\\ &= (\mathrm{sgn}J_f)\int_V \omega. \qquad \Box\end{aligned}$$

1.5 定理(映射度的积分表示) 设 M 是紧致的定向光滑流形,N 是连通的定向光滑流形,$\dim M=\dim N=n$. 又设 Q 是 N 的一个"标准"的局部坐标域,$\omega\in\Omega^n(N)$ 是紧支于 Q 中的形式,$f\in C^\infty(M,N)$. 则有

$$\int f^*\omega=\deg(f)\int\omega.$$

特别地,如果 ω 还满足条件 $\int\omega=1$, 那么就有

$$\deg(f)=\int f^*\omega.$$

证明 在 Q 中任取 f 的一个正则值 q. 根据"唱片引理",$f^{-1}(q)$ 是有限点集:

$$f^{-1}(q)=\{p_1,\cdots,p_k\},$$
并且存在 q 的开邻域 $V\subset Q$ 和 p_i 在 M 中的开邻域 $U_i(i=1,\cdots,k)$，使得

(1) $U_i\cap U_j=\varnothing,\ \forall i\neq j$;

(2) $f^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k$;

(3) $f|U_i:U_i\to V$ 是光滑同胚.

我们选取一个紧支于 V 中的形式 $\omega'\in\Omega^n(N)$. 必要时乘以适当常数，可设 ω' 满足条件

$$\int\omega'=\int\omega.$$

于是(根据推论 1.3 和引理 1.4)有

$$\int f^*\omega=\int f^*\omega'=\sum_{i=1}^{k}\int_{U_i}(f|U_i)^*\omega'=\sum_{i=1}^{k}(\mathrm{Sgn}f_{*,p_i})\int\omega'$$

$$=\deg(f)\int\omega'=\deg(f)\int\omega.\qquad\square$$

1.6 定理(积分变元替换的映射度公式) 设 M 是紧致的定向光滑流形，N 是连通的定向光滑流形，$\dim M=\dim N=n$，$f\in C^\infty(M,N)$，$\omega\in\Omega_c^n(N)$. 则有

$$\int f^*\omega=\deg(f)\int\omega.$$

证明 首先选取 N 的一族"标准"的局部坐标图卡$\{(Q,\psi)\}$，使得 $\mathcal{Q}=\{Q\}$ 覆盖了 N. 然后选取从属于覆盖 $\mathcal{Q}$ 的一个单位分解($\{\mathrm{supp}\,\eta_\alpha\}$具有局部有限性)：

$$1=\sum_\alpha\eta_\alpha(y).$$

我们将 ω 表示成

$$\omega=\sum_\alpha\eta_\alpha\omega=\sum_\alpha\omega_\alpha,$$

这里 $\omega_\alpha=\eta_\alpha\omega$ 是紧支于某个"标准"的局部坐标域中的形式．根据定理 1.5,

$$\int f^*\omega_\alpha=\deg(f)\int\omega_\alpha.$$

因而有

$$\int f^*\omega=\sum_\alpha\int f^*\omega_\alpha=\sum_\alpha\deg(f)\int\omega_\alpha$$

$$=\deg(f)\sum_\alpha\int\omega_\alpha=\deg(f)\int\omega. \qquad \square$$

§2 Gauss-Bonnet 公式

赋有确定 Riemann 度量的光滑流形被称为光滑 Riemann 流形．设 X 是定向的 n 维光滑 Riemann 流形．在 X 的各个局部坐标域上，给定的 Riemann 度量(对称正定的二阶协变张量)表现为

(2.1) $$g_{ij}\quad(i,j=1,\cdots,n).$$

我们约定记

(2.2) $$g=\det(g_{ij}).$$

考察外微分形式

(2.3) $$\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

容易验证：由(2.3)所定义的形式不依赖于正向局部坐标系的选择(对正向局部坐标的变换具有不变性)．我们把这样定义的形式称作 Riemann 流形 X 的面积形式(或称作面积微元)．

如同第十章 §4 中所述，我们将 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的任何一个连通的 n 维光滑正则子流形 X 称为"$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面"，并且认为在 X 上赋有由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 Euclid 内积诱导的 Riemann 度量．

设 X 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面．则由 X 的外法线方向可以确定流形 X 的定向．因而任何紧致的超曲面都是可定向的．

考察 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的两个紧致的超曲面 M 和 N. 设 M 和 N 的"正向"面积形式(即表示"正向"面积微元的 n 次外微分形式)分别是 A_M 和 A_N. 如果 $f: M \to N$ 是光滑映射. 那么 f^*A_N 是 M 上的一个光滑的 n 次外微分形式. 因为 $\Omega^n(M)$ 限制在各点都是 1 维线性空间,所以 f^*A_N 与 A_M 逐点相关:

$$f^*A_N(x) = \lambda(x) A_M(x). \tag{2.4}$$

我们将 (2.4) 式中的系数 $\lambda(x)$ 定义为映射 f 在点 $x \in M$ 处的 Jacobian, 记作

$$J_f(x) := \lambda(x) \quad (x \in M). \tag{2.5}$$

设 M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个紧致的超曲面. 对于任意的 $x \in M$, 可以确定 M 在 x 点的单位长外法线向量 $G(x)$, 这样定义了一个映射 $G: M \to S^n$. 映射 G 被称为超曲面 M 的 **Gauss 映射**. 这个映射在 x 点的 Jacobian 被称为 M 在 x 点的 **Gauss 曲率**, 记为

$$K(x) := J_G(x) \quad (x \in M). \tag{2.6}$$

关于偶数维超曲面 M 的 Gauss 曲率沿该超曲面的积分,有以下著名的定理.

Gauss-Bonnet 公式 设 n 是偶数, M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一个紧致光滑超曲面,则有

$$\int_M K(x) A_M(x) = \frac{1}{2} \gamma_n \chi(M),$$

式中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数, γ_n 是 n 维单位球面 S^n 的面积.

特别地,对于 $n=2$ 的情形, $\gamma_2 = 4\pi$. 因而对于 $\mathbb{R}^3$ 中的超曲面 M 有这样的公式:

$$\int_M K(x) A_M(x) = 2\pi \chi(M).$$

证明 为了叙述方便,我们将证明分成若干步骤.

(I) 根据 Gauss 曲率的定义

$$K(x) A_M(x) = J_G(x) A_M(x) = G^* A_{S^n}(x).$$

运用积分变元替换的映射度公式,我们得到

$$\int_M K(x)A_M(x)=\int_M J_G(x)A_M(x)=\int_M G^*A_{S^n}(x)$$

$$=\deg(G)\int_{S^n} A_{S^n}=\deg(G)\cdot\gamma_n.$$

于是，为了证明 Gauss-Bonnet 公式，只须证明

$$\deg(G)=\chi(M)/2.$$

为此目的，我们需要将 Gauss 映射（即单位法向量场）与适当的切向量场联系起来．

（Ⅱ）选取 $a\in S^n$，使得 a 是 G 与 $-G$ 共同的正则值．于是 a 与 $-a$ 都是 G 的正则值．我们在 M 上定义这样一个向量场：

$$V(x)=(-a)-((-a)\cdot G(x))G(x)=(a\cdot G(x))G(x)-a,$$

式中的圆黑点"•"表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的内积运算（请参看图 30）．

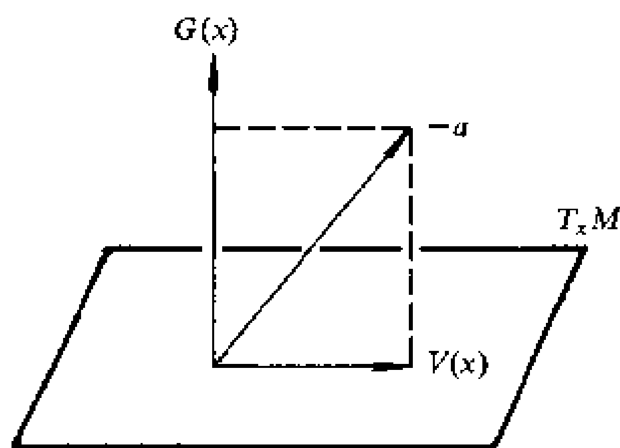


图　30

向量场 $V(x)$ 的零点就是使得 $G(x)=\pm a$ 的点 x．因为 $\pm a\in S^n$ 是 G 的正则值，所以 $V(x)$ 的所有的零点都是孤立的．又因为 M 是紧致的，所以 $V(x)$ 的零点数目有限．为了计算 $V(x)$ 在各零点处的指标，我们需要计算 $dV(x)$．

（Ⅲ）我们写出 $V(x)$ 的表示式

$$V(x)=(a\cdot G(x))G(x)-a.$$

对这表示式作微分运算得到

$$\mathrm{d}V_x(\xi)=(a\cdot G(x))\mathrm{d}G_x(\xi)+(a\cdot \mathrm{d}G_x(\xi))G(x),$$

这里 $\xi\in T_xM$. 因为

$$G(x)\cdot G(x)=1,\quad \forall x\in M,$$

所以对任意的 $\xi\in T_xM$ 有

$$G(x)\cdot \mathrm{d}G_x(\xi)=0.$$

于是,在使得 $G(x)=\pm a$ 的点 x 处,应有

$$a\cdot \mathrm{d}G_x(\xi)=\pm G(x)\cdot \mathrm{d}G_x(\xi)=0.$$

因此,对于使得 $G(x)=\pm a$ 的点 x 有

$$\mathrm{d}V_x=\begin{cases}\mathrm{d}G_x, & 若\ G(x)=a,\\ -\mathrm{d}G_x, & 若\ G(x)=-a.\end{cases}$$

又因为 $\dim M=n$ 是偶数,所以

$$\mathrm{Sgn}(-G)_{*,x}=\mathrm{Sgn}G_{*,x}.$$

因而对于 $G(x)=a$ 和 $G(x)=-a$ 这两种情形都有

$$\mathrm{Sgn}V_{*,x}=\mathrm{Sgn}G_{*,x}.$$

(Ⅳ) 向量场 V 的零点的集合 Z 可以表示为 $Z=Z_+\cup Z_-$,其中

$$Z_+=\{x\in M\mid G(x)=a\}=G^{-1}(a),$$
$$Z_-=\{x\in M\mid G(x)=-a\}=G^{-1}(-a).$$

根据(Ⅲ)中得到的结论,对于任意的 $x\in Z$ 都有

$$\mathrm{Sgn}V_{*,x}=\mathrm{Sgn}G_{*,x}.$$

利用环绕数与(局部)映射度之间的关系,对任意的 $x\in Z$ 容易得到

$$\mathrm{ind}_xV=\mathrm{Sgn}V_{*,x}=\mathrm{Sgn}G_{*,x}.$$

据此,我们算出

$$\begin{aligned}\sum_{x\in Z}\mathrm{ind}_xV&=\sum_{x\in Z_+}\mathrm{ind}_xV+\sum_{x\in Z_-}\mathrm{ind}_xV\\ &=\sum_{x\in Z_+}\mathrm{Sgn}G_{*,x}+\sum_{x\in Z_-}\mathrm{Sgn}G_{*,x}\\ &=\deg(G)+\deg(G)=2\deg(G).\end{aligned}$$

根据 Poincaré-Hopf 指标和定理，我们得到

$$\deg(G)=\chi(M)/2.$$

综合以上的讨论，我们已经证明了 Gauss-Bonnet 公式：

$$\int_M K(x)A_M(x)=\frac{1}{2}\gamma_n\chi(M). \qquad \square$$

练　习　L

L.1. 设 $M=S_r^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的半径为 r 的球面．试根据 Gauss 曲率的几何意义计算 M 的 Gauss 曲率．

L.2. 试利用 Gauss-Bonnet 公式计算 S_r^{2n} 的 Euler 示性数．

解答下面的练习 L.3 和 L.4 需要知道紧致连通可定向的二维流形的拓扑分类．

L.3. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致超曲面，其 Gauss 曲率适合条件

$$K(p)\geqslant 0,\quad \forall p\in M,$$

并且 $K(p)$ 不恒等于 0．试证 M 同胚于 S^2．

L.4. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中的紧致超曲面，其 Gauss 曲率适合条件

$$K(p)>0,\quad \forall p\in M.$$

试证明 Gauss 映射 $G: M\to S^2$ 是一个微分同胚．

L.5. 设 n 是偶自然数，M 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的紧致超曲面，适合条件：

(i) $K(p)>0,\ \forall p\in M$;

(ii) $\chi(M)=2$.

试证：M 微分同胚于 S^n．

附录δ　外微分形式的积分与一般 Stokes 定理

§δ.1　对偶空间及其外幂，Grassmann 代数

设 V 是给定的(有限维)实线性空间．若映射 $f: V \to \mathbf{R}$ 满足这样的条件:

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ x, y \in V,$$

则称 f 为**线性函数**．我们约定将定义于 V 上的所有线性函数的集合记为 V^*．

δ.1.1　定义　按照通常方式定义线性函数的加法运算及乘以实数的运算，V^* 成为一个线性空间．我们把这样的线性空间 V^* 称为 V 的**对偶空间**．

δ.1.2　注记　对于 $f \in V^*$ 和 $x \in V$，常常把 f 在 x 点的值记为

$$\langle f, x\rangle :=f(x).$$

容易看出：给定 V 的一组基底 $e_1, \cdots, e_n$ 之后，线性函数 $f \in V^*$ 由它在基底向量上的值所完全确定，即 f 由

$$\langle f, e_j\rangle, \ j=1, \cdots, n$$

完全确定．

设选定了 V 的一组基底 $e_1, \cdots, e_n$．则 $x \in V$ 可唯一地表示成

$$x=\sum_{j=1}^{n} x^j e_j. \tag{δ.1.1}$$

借助于表示式(δ.1.1)，我们定义这样一些映射

$$f^k(x):=x^k, \quad k=1, \cdots, n.$$

容易看出 $f^k \in V^*(k=1, \cdots, n)$ 并且

$$\langle f^i, e_j\rangle=\delta_j^i, \quad i, j=1, \cdots, n. \tag{δ.1.2}$$

任何一个 $g\in V^*$ 都可以由 $f^1,\cdots,f^n$ 线性表出:

$$(\delta.1.3) \qquad g=\sum_{i=1}^{n}\langle g,e_i\rangle f^i.$$

δ.1.3 定理 选定了 V 的一组基底 $e_1,\cdots,e_n$ 之后，由 (δ.1.2) 所决定的线性函数 $f^1,\cdots,f^n$ 构成 V^* 的一组基底(称为相应于 $e_1,\cdots,e_n$ 的**对偶基底**). 因而对偶空间 V^* 的维数等于空间 V 的维数:

$$\dim V^*=\dim V=n.$$

证明 利用(δ.1.2)式容易证明 $f^1,\cdots,f^n$ 是线性无关的. 由(δ.1.3)式可以看出 $f^1,\cdots,f^n$ 是 V^* 的生成组. □

设 V 是有限维实线性空间. 我们约定以 V^p 表示 V 的 p 重乘积, 即约定记

$$V^p=\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{p\text{个}V}.$$

δ.1.4 定义 (Ⅰ) 如果映射 $\varphi: V^p\to\mathbb{R}$ 对任意的 $i\in\{1,\cdots,p\}$, $u_j(j\neq i)$, $v,w\in V$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足这样的条件:

$$\begin{aligned}\varphi(u_1,\cdots,u_{i-1},\alpha v+\beta w,u_{i+1},\cdots,u_p)\\ =\alpha\varphi(u_1,\cdots,u_{i-1},v,u_{i+1},\cdots,u_p)\\ +\beta\varphi(u_1,\cdots,u_{i-1},w,u_{i+1},\cdots,u_p),\end{aligned}$$

那么我们就称 φ 为 V 上的 **p 重线性函数**.

(Ⅱ) V 上的 p 重线性函数 φ 被称为是**反对称的**, 倘若对任意的 $u_1,\cdots,u_p\in V$ 和任意的 $i,j\in\{1,\cdots,p\}$, $i<j$, 以下条件均得以满足:

$$\varphi(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_j,\cdots,u_p)=-\varphi(u_1,\cdots,u_j,\cdots,u_i,\cdots,u_p).$$

(Ⅲ) V 上所有的反对称 p 重线性函数组成的集合记为 $\bigwedge^p V^*$.

δ.1.5 记号约定 (1) 约定以 $\mathscr{S}_p$ 表示由 $\{1,\cdots,p\}$ 的所有的置换组成的集合(这是一个有 $p!$ 个元素的群).

(2) 对于 $\sigma\in\mathscr{S}_p$, 约定记

$$\text{sgn}\sigma=\begin{cases}1, & \text{倘若 } \sigma \text{ 是偶置换},\\ -1, & \text{倘若 } \sigma \text{ 是奇置换}.\end{cases}$$

(3) 设 V 是实线性空间，φ 是 V 上的 p 重线性函数，$\sigma\in\mathscr{S}_p$. 我们约定用记号 φ^σ 表示这样定义的一个 p 重线性函数:

$$\varphi^\sigma(u_1,\cdots,u_p):=\varphi(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(p)}).$$

(4) 设 V 是实线性空间，φ 是 V 上的 p 重线性函数. 我们约定用记号 $\mathscr{A}\varphi$ 表示按以下方式构作的一个 p 重线性函数:

$$\mathscr{A}\varphi:=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_p}(\text{sgn}\sigma)\varphi^\sigma.$$

δ.1.6 引理 (i) $(\varphi^\sigma)^\tau=\varphi^{(\sigma\tau)}$.

(ii) 如果 φ 是一个 p 重线性函数,那么 $\mathscr{A}\varphi$ 是一个反对称的 p 重线性函数.

(iii) 如果 φ 本身是反对称的 p 重线性函数,那么

$$\varphi^\sigma=(\text{sgn}\sigma)\varphi,\quad \mathscr{A}\varphi=(p!)\varphi.$$

证明 留作练习. □

δ.1.7 定义 设 V 是一个实线性空间.

(Ⅰ) 如果 φ 和 ψ 分别是 V 上的 p 重和 q 重线性函数，那么按照以下方式定义的 $p+q$ 重线性函数 $\varphi\otimes\psi$ 被称为 φ 与 ψ 的张量积:

$$\varphi\otimes\psi(u_1,\cdots,u_p,u_{p+1},\cdots,u_{p+q}):=\varphi(u_1,\cdots,u_p)\psi(u_{p+1},\cdots,u_{p+q}).$$

(请注意: $\varphi\otimes\psi\neq\psi\otimes\varphi$.)

(Ⅱ) 如果 $\varphi\in\bigwedge^p V^*$，$\psi\in\bigwedge^q V^*$，那么按照以下方式定义的 $\varphi\wedge\psi\in\bigwedge^{p+q}V^*$ 被称为 φ 与 ψ 的外乘积:

$$\varphi\wedge\psi:=\frac{1}{p!q!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).$$

δ.1.8 引理 设 V 是实线性空间，φ 和 ψ 分别是 V 上的 r 重和 s 重线性函数,则有

(1) $\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)=(-1)^{rs}\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi)$,

(2) $\mathscr{A}((\mathscr{A}\varphi)\otimes\psi)=r!\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)$,

$$\mathscr{A}(\varphi\otimes(\mathscr{A}\psi))=s!\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).$$

证明 (1) 以 η 表示这样一个置换:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & s+r \\ r+1 & \cdots & r+s & 1 & \cdots & r \end{pmatrix},$$

则有

$$\operatorname{sgn}\eta=(-1)^{rs}\quad,\quad \varphi\otimes\psi=(\psi\otimes\varphi)^{\eta}.$$

因而

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)&=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\sigma)(\varphi\otimes\psi)^{\sigma}=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\sigma)(\psi\otimes\varphi)^{\eta\sigma}\\ &=(-1)^{rs}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\eta\sigma)(\psi\otimes\varphi)^{\eta\sigma}=(-1)^{rs}\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi).\end{aligned}$$

(2) 我们约定把 $\tau\in\mathscr{S}_r$ 也看成是 $\mathscr{S}_{r+s}$ 的这样一个元素:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ \tau(1) & \cdots & \tau(r) & r+1 & \cdots & r+s \end{pmatrix}.$$

计算得到

$$\begin{aligned}\mathscr{A}((\mathscr{A}\varphi)\otimes\psi)&=\mathscr{A}\left(\left(\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\varphi^{\tau}\right)\otimes\psi\right)\\ &=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\mathscr{A}((\varphi^{\tau})\otimes\psi)\\ &=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\mathscr{A}((\varphi\otimes\psi)^{\tau})\\ &=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\sigma)(\varphi\otimes\psi)^{\tau\sigma}\\ &=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}(\tau\sigma))(\varphi\otimes\psi)^{\tau\sigma}\\ &=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)=r!\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\varphi\otimes(\mathscr{A}\psi))&=(-1)^{rs}\mathscr{A}((\mathscr{A}\psi)\otimes\varphi)\\ &=(-1)^{rs}s!\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi)=s!\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).\end{aligned}\qquad\square$$

8.1.9 命题 外乘积运算 $\wedge$ 具有以下性质:

(i) $\varphi\wedge\psi$ 关于 φ 和 ψ 分别都是线性的;

(ii) 如果 $\varphi\in\bigwedge^r V^*$, $\psi\in\bigwedge^s V^*$, 那么

$$\varphi\wedge\psi=(-1)^{rs}\psi\wedge\varphi;$$

(iii) 运算 $\wedge$ 是结合的,即

$$(\varphi\wedge\psi)\wedge\theta=\varphi\wedge(\psi\wedge\theta);$$

(iv) 对于 $\varphi_i\in\bigwedge^{r_i}V^*(i=1,\cdots,k)$ 有

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k=\frac{1}{r_1!\cdots r_k!}\mathscr{A}(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_k).$$

证明 (i) 是显然的. 下面证明(ii), (iii)和(iv).

(ii) $\varphi\wedge\psi=\dfrac{1}{r!s!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)$

$$=(-1)^{rs}\frac{1}{s!r!}\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi)=(-1)^{rs}\psi\wedge\varphi.$$

(iii) 设 $\varphi\in\bigwedge^r V^*$, $\psi\in\bigwedge^s V^*$, $\theta\in\bigwedge^t V^*$, 则有

$$\begin{aligned}(\varphi\wedge\psi)\wedge\theta&=\frac{1}{(r+s)!t!}\mathscr{A}((\varphi\wedge\psi)\otimes\theta)\\&=\frac{1}{(r+s)!t!}\mathscr{A}\left(\frac{1}{r!s!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)\otimes\theta\right)\\&=\frac{1}{(r+s)!r!s!t!}\mathscr{A}(\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)\\&=\frac{1}{(r+s)!r!s!t!}(r+s)!\mathscr{A}((\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)\\&=\frac{1}{r!s!t!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi\otimes\theta).\end{aligned}$$

同样可以证明

$$\varphi\wedge(\psi\wedge\theta)=\frac{1}{r!s!t!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi\otimes\theta).$$

(iv) 仿照(iii)证明中的作法,对 k 归纳,就可得到(iv)的证

明． □

δ.1.10 记号约定 设 V 是 n 维实线性空间，我们以 $\{1,\cdots,n\}$ 为基本标号集．

(1) 设 $i_1,\cdots,i_p\in\{1,\cdots,n\}$，我们称 $I=(i_1,\cdots,i_p)$ 为 p 阶重指标．

(2) 设 $j_1,\cdots,j_p\in\{1,\cdots,n\}$ 适合条件

$$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n,$$

则称 $J=(j_1,\cdots,j_p)$ 为 p 阶上升重指标．

(3) 约定以 $\mathscr{I}_p=\mathscr{I}_p(n)$ 表示所有的（以 $\{1,\cdots,n\}$ 为基本标号集的）p 阶重指标的集合；约定以 $\mathscr{J}_p=\mathscr{J}_p(n)$ 表示（以 $\{1,\cdots,n\}$ 为基本标号集的）p 阶上升重指标的集合．显然有 $\mathscr{J}_p\subset\mathscr{I}_p$．

(4) 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基底．对于 $I=(i_1,\cdots,i_p)\in\mathscr{I}_p$，我们约定记

$$e_I=(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}).$$

(5) 设 φ 是从 V^p 到 $\mathbb{R}$ 的映射．对于 $I=(i_1,\cdots,i_p)\in\mathscr{I}_p$，我们约定记

$$\varphi(e_I)=\varphi(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}).$$

(6) 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基底，$f^1,\cdots,f^n$ 是相应的对偶基底．对于 $I=(i_1,\cdots,i_p)\in\mathscr{I}_p$，我们约定记

$$f^I=f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_p}.$$

δ.1.11 命题 设 V 是 n 维实线性空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基底，$f^1,\cdots,f^n$ 是相应的对偶基底．

(i) 对于 $p\leqslant n$，任何一个 $\varphi\in\wedge^pV^*$ 由它在各 $e_J(J\in\mathscr{J}_p)$ 上的值完全确定：

$$\varphi=\sum_{J\in\mathscr{J}_p}\varphi(e_J)f^J. \tag{δ.1.4}$$

(ii) 对于 $p\leqslant n$，反对称 p 重线性函数

$$f^J,\quad J\in\mathscr{J}_p$$

构成 $\wedge^pV^*$ 的一组基底．因而

$$\dim \bigwedge^p V^* = \binom{n}{p}.$$

(iii) 对于 $q>n$,

$$\bigwedge^q V^* = \{0\}.$$

证明 对于 $J, K\in\mathscr{J}_p$, 约定记

$$\delta_K^J = \begin{cases} 1, & 如果 J=K, \\ 0, & 如果 J\neq K. \end{cases}$$

容易验证

$$f^J(e_K)=\delta_K^J. \tag{δ.1.5}$$

(i) 由于 p 重线性性质和反对称性质,显然任何一个 $\varphi\in\bigwedge^p V^*$ 由它在各个 $e_K(K\in\mathscr{J}_p)$ 上的值所完全决定. 因为(δ.1.4)等号两边的式子在各 $e_K(K\in\mathscr{J}_p)$ 上的值完全一致,所以该等式成立.

(ii) 根据(δ.1.4),反对称 p 重线性函数 f^J, $J\in\mathscr{J}_p$ 生成 $\bigwedge^p V^*$. 根据(δ.1.5),很容易验证这些 $f^J(J\in\mathscr{J}_p)$是线性无关的,因而构成 $\bigwedge^p V^*$ 的基底. 由此得知

$$\dim \bigwedge^p V^* = \binom{n}{p}.$$

(iii) 设 $q>n$. 对于

$$u_s=\sum_{t=1}^{n}\lambda_{st}e_t,\quad s=1,\cdots,q,$$

利用 $\varphi\in\bigwedge^q V^*$ 的多重线性性质可得

$$\varphi(u_1,\cdots,u_q)=\sum_{t_1,\cdots,t_q=1}^{n}\lambda_{1t_1}\cdots\lambda_{qt_q}\varphi(e_{t_1},\cdots,e_{t_q}).$$

因为 $q>n$,所以在 $e_{t_1},\cdots,e_{t_q}$ 之中必有两个相同的. 利用 φ 的反对称性质,容易看出 $\varphi(e_{t_1},\cdots,e_{t_q})=0$. 这证明了

$$\bigwedge^q V^* = \{0\}. \qquad \square$$

附注 如果不限于 p 阶上升重指标,那么我们可以把(δ.1.4)式改写为

$$(\delta.1.6) \qquad \varphi = \frac{1}{p!}\sum_{I\in\mathscr{I}_p}\varphi(e_I)f^I.$$

δ.1.12 记号约定 设 V 是 n 维实线性空间，V^* 是其对偶空间，我们约定记：

$$\wedge^0 V^* = \mathbb{R}, \quad \wedge^1 V^* = V^*,$$

$$\wedge V^* = \wedge^0 V^* \oplus \wedge^1 V^* \oplus \cdots \oplus \wedge^n V^*.$$

δ.1.13 定理 $\wedge V^*$ 连同所定义的加法，数乘和外乘运算构成一个代数，称之为外代数或 Grassmann 代数．该代数的维数为

$$\dim \wedge V^* = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

附注 对于 $p \leqslant n$，容易看出

$$\wedge^p V^* = \underbrace{V^* \wedge \cdots \wedge V^*}_{p\text{个} V^*};$$

因而 $\wedge^p V^*$ 被称为 V^* 的 p 重外幂空间．如果 $p+q>n$，那么对于 $\varphi\in\wedge^p V^*$ 和 $\psi\in\wedge^q V^*$，显然有 $\varphi\wedge\psi=0$．

δ.1.14 定义 设 V 和 W 是(有限维)实线性空间．约定以 $L(V,W)$ 表示所有从 V 映入 W 的线性映射组成的集合．对于 $A\in L(V,W)$ 和 $\psi\in\wedge^p W^*$，我们定义这样一个 $A^*\psi\in\wedge^p V^*$：

$$A^*\psi(v_1,\cdots,v_p) := \psi(Av_1,\cdots,Av_p).$$

于是，由 $A\in L(V,W)$ 诱导了一个线性映射

$$A^*\in L(\wedge^p W^*, \wedge^p V^*).$$

δ.1.15 命题 对于 $\varphi\in\wedge^p W^*$，$\psi\in\wedge^q W^*$ 和 $A\in L(V,W)$，以下等式成立：

$$A^*(\varphi\wedge\psi) = (A^*\varphi)\wedge(A^*\psi). \qquad \square$$

δ.1.16 命题 设 V 是 n 维实线性空间，$e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基底，$A\in L(V,V)$ 经由这组基底表示为

$$Ae_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

则对任何一个 $\varphi\in\wedge^n V^*$ 有

$$A^*\varphi=\det(a_{ij})\varphi .$$

证明 根据定义,容易算出

$$A^*\varphi(e_1,\cdots,e_n)=\varphi(Ae_1,\cdots,Ae_n)=\varphi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1},\cdots,\sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}e_{i_n}\right)$$

$$=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\varphi(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)})$$

$$=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n}(\operatorname{sgn}\sigma)a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\varphi(e_1,\cdots,e_n)$$

$$=\det(a_{ij})\varphi(e_1,\cdots,e_n) .$$

这证明了 $A^*\varphi=\det(a_{ij})\varphi$. □

§δ.2 余切丛与余切外幂丛,外微分形式

δ.2.1 定义 设 M 是一个微分流形, $p\in M$. 我们把切空间 T_pM 的对偶空间

$$T_p^*M:=(T_pM)^*$$

定义为 M 在 p 点的**余切空间**.

设 f 是在 p 点邻近有定义并且连续可微的实值函数, γ 是 M 上通过 p 点的一条连续可微曲线($\gamma(0)=p$). 对于 γ 所决定的切向量$[\gamma]\in T_pM$, 我们定义

$$(\delta.2.1)\qquad \mathrm{d}f([\gamma]):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma(t))|_{t=0}.$$

选取 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ),可以将 $\mathrm{d}f([\gamma])$ 表示为

$$(\delta.2.2)\qquad \mathrm{d}f([\gamma])=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma)(t))|_{t=0}$$

$$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}(\pi^i\circ\varphi\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}.$$

这里(且在以后许多类似的情形中),我们采用了如下的简化记号:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1}(x))}{\partial x^i}\bigg|_{x=\varphi(p)}, \qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\pi^i \circ \varphi \circ \gamma(t))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0},$$

其中的 π^i 表示 $\mathbb{R}^n$ 向其第 i 个因子空间的投影.

从(δ.2.2)式可以看出,**微分**

$$\mathrm{d}f: T_pM \to \mathbf{R}$$

是一个线性函数,即

$$\mathrm{d}f \in T_p^*M. \tag{δ.2.3}$$

特别地,对于局部坐标分量 $x^i = \pi^i \circ \varphi$ 的微分 $\mathrm{d}x^i$,有这样的关系

$$\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial x^i}{\partial x^n}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} j;$$

也就是

$$\left\langle \mathrm{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \tag{δ.2.4}$$

设 M 是 C^r 流形$(r \geqslant 1)$, (U, φ)是 M 的局部坐标图卡, $(x^1, \cdots, x^n)$是由 φ 给出的局部坐标, $p \in U$. 从(δ.2.4)可以看出,余切空间 T_p^*M 的标架 $\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n$ 是切标架 $\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ 的对偶标架(即对偶基底). 当 p 点在 U 中变动时, $(\mathrm{d}x^1, \cdots, \mathrm{d}x^n)$ 构成 $\coprod_{p \in U} T_p^*M$ 的标架场. 而当局部坐标改变的时候,局部标架

场之间的变换是一个 C^{r-1} 变换:

$$\mathrm{d}x^i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k.$$

从以上的讨论可以看出:

$$T^*M=\coprod_{p\in M}T_p^*M \tag{δ.2.5}$$

构成以 M 为底的一个 C^{r-1} 向量丛. 类似地,考察局部标架场 $\mathrm{d}x^J$ $(J\in\mathscr{J}_k)$ 可知:

$$\wedge^kT^*M=\coprod_{p\in M}\wedge^kT_p^*M \tag{δ.2.6}$$

构成以 M 为底的一个 C^{r-1} 向量丛.

δ.2.2 定义 向量丛(δ.2.5)和(δ.2.6)分别被称为 M 的**余切丛**和(k 次)**余切外幂丛**.

δ.2.3 定义 设 M 是一个 C^r 流形($r\geqslant1$). 余切外幂丛 $\wedge^kT^*M$ 的 C^s 截面($s\leqslant r-1$)被称为 k 次 C^s **外微分形式**.

借助于局部坐标, k 次外微分形式 ω 表示为

$$\omega=\sum_{J\in\mathscr{J}_k}g_J(x)\mathrm{d}x^J=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}g_{j_1\cdots j_k}(x)\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}. \tag{δ.2.7}$$

容易看出: 当且仅当表示式(δ.2.7)的各个系数 $g_J(x)(J\in\mathscr{J}_k)$ 是 C^s 函数时($s\leqslant r-1$), ω 是 C^s 形式.

δ.2.4 定义 设 M 和 N 是 C^r 流形($r\geqslant1$), $f\in C^r(M,N)$. 切线性映射

$$f_{*,p}: T_pM\to T_{f(p)}N$$

诱导了从 $\wedge^kT_{f(p)}^*N$ 到 $\wedge^kT_p^*M$ 的线性映射 f_p^*. 对于 N 上的 k 次外微分形式 ω, 我们定义

$$(f^*\omega)_p:=f_p^*(\omega_{f(p)}).$$

于是, $f^*\omega$ 是定义于 M 上的一个 k 次外微分形式.

对于 N 上的 0 次外微分形式,即连续可微函数 g, 我们将 f^*g 定义为这样一个函数: $(f^*g)(p)=g(f(p))$.

δ.2.5 引理 对于如上定义的 f^*, 有以下这些关系:

(1) $f^*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1 f^*\omega_1+\lambda_2 f^*\omega_2\ (\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R})$;

(2) $f^*(\omega\wedge\theta)=f^*\omega\wedge f^*\theta$;

(3) $(g\circ f)^*\omega=f^*(g^*\omega)$.

证明 留作练习. □

δ.2.6 例 设 U 和 V 分别是 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f\in C^1(U,V)$. 约定以 $(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $(y^1,\cdots,y^n)$ 分别表示 U 和 V 中的坐标,则有:

(i) $f^*\mathrm{d}y^j=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}f^j$;

(ii) 设 $\omega=\sum\limits_{I}g_I(y)\mathrm{d}y^I$ 是 V 上的一个 k 次外微分形式,则 $f^*\omega$ 是 U 上的这样一个 k 次外微分形式

$$f^*\omega=\sum_I g_I(f(x))f^*\mathrm{d}y^I=\sum_I g_I(f(x))\mathrm{d}f^I;$$

(iii) 特别地,对于 $m=n$ 的情形.设 ω 是 V 上的 n 次外微分形式,则有

$$\omega=g(y)\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n,$$

$$\begin{aligned}f^*\omega&=g(f(x))\mathrm{d}f^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^n\\&=g(f(x))\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.\end{aligned}$$

§δ.3 外微分运算 d

为了避免琐碎的细节,本附录以下将只限于讨论 C^∞ 的情形.

δ.3.1 记号约定 设 M 是 n 维光滑流形. 我们约定将 M 上的所有光滑的 k 次外形式组成的集合记为 $\Omega^k(M)$. 我们还约定记

$$\Omega^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R});$$

$$\Omega^{n+l}(M)=\{0\},\quad l=1,2,\cdots;$$

$$\Omega(M)=\Omega^0(M)\oplus\Omega^1(M)\oplus\cdots\oplus\Omega^n(M)\oplus\cdots.$$

δ.3.2 注记 设$f\in \Omega^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R})$,则对每个$p\in M$, $(\mathrm{d}f)_p$是从T_pM到$\mathbb{R}$的线性映射,即$(\mathrm{d}f)_p\in T_p^*M$. 由此可见$\mathrm{d}f$是$T^*M$的光滑截面. 因而$\mathrm{d}f\in \Omega^1(M)$.

δ.3.3 定理 设M是n维光滑流形,则存在唯一的运算(称之为外微分运算)

$$\mathrm{d}: \Omega(M)\to \Omega(M),$$

适合以下这些条件:

(D_1) 如果$f\in \Omega^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R})$,那么$\mathrm{d}f$如注记δ.3.2中所述;

(D_2) d是线性的,即

$$\mathrm{d}(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1\mathrm{d}\omega_1+\lambda_2\mathrm{d}\omega_2,\quad \forall \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},\quad \omega_1,\omega_2\in\Omega(M);$$

(D_3) 如果$\omega\in\Omega^s(M)$,那么

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=\mathrm{d}\omega\wedge\theta+(-1)^s\omega\wedge\mathrm{d}\theta;$$

(D_4) 对于$f\in \Omega^0(M)=C^\infty(M,\mathbb{R})$,

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)=0.$$

我们把定理δ.3.3的证明分解为以下的引理δ.3.4, 引理δ.3.5和引理δ.3.6.

δ.3.4 引理 满足定理δ.3.3中条件(D_1)—(D_4)的运算d具有局部性. 这就是说: 如果U是M的任意开集,那么$(\mathrm{d}\omega)|U$完全由$\omega|U$所决定.

证明 假设$\omega|U=\theta|U$,将证明: $(\mathrm{d}\omega)|U=(\mathrm{d}\theta)|U$. 以$\omega-\theta$代替$\omega$,只须证明

$$\omega|U=0\Longrightarrow(\mathrm{d}\omega)|U=0.$$

对于任意一点$p\in U$,选择闭包为紧致集的开集W,使得

$$p\in W\subset\overline{W}\subset U.$$

然后选择$f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$,适合条件

$$f(q)=\begin{cases}1, & \forall q\in\overline{W},\\ 0, & \forall q\in M\setminus U.\end{cases}$$

于是有$f(q)\omega(q)\equiv 0$, $\forall q\in M$. 根据条件(D_1)和(D_3).

$$0=\mathrm{d}(f\omega)=\mathrm{d}f\wedge\omega+f\mathrm{d}\omega.$$

因为 $\mathrm{d}f(p)=0$ 且 $f(p)=1$,所以

$$(\mathrm{d}\omega)(p)=f(p)(\mathrm{d}\omega)(p)=0.$$

又因为 p 是 U 中任意一点,所以

$$(\mathrm{d}\omega)\,|\,U=0. \qquad \square$$

δ.3.5 引理 满足定理 δ.3.3 中条件 (D_1)—(D_4)的运算 d 是唯一确定的.

证明 由于引理 δ.3.4,只须限制到一个局部坐标域上加以考察. 基于线性性质 (D_2),不妨设 $\omega\in\Omega^k(U)$ 是这样一个"单项"形式

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

根据 (D_1), (D_3)和(D_4)可得

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

由此可见,满足条件(D_1)—(D_4)的运算 d 具有唯一确定性. $\square$

δ.3.6 引理 满足定理 δ.3.3 中条件 (D_1)—(D_4)的运算 d 确实存在.

证明 先设 U 是 M 的一个局部坐标域,并设 $\omega\in\Omega^k(U)$ 是这样一个"单项"形式:

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

从引理 δ.3.5 的证明得到启发,我们定义

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

特别地,对于 $f\in\Omega^0(U)=C^\infty(U,\mathbb{R})$,这里的定义与注记 δ.3.2 中所述的一致. 按照线性原则,可以将上面所定义的运算 d 扩展到所有的 $\omega\in\Omega(U)$.

下面验证所定义的运算

$$\mathrm{d}:\Omega(U)\to\Omega(U)$$

满足(相应于 U 的)条件(D_1)—(D_4). 我们定义的方式已经保证了(D_1)和(D_2)成立. 为了验证(D_3),不妨设

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}=f(x)\mathrm{d}x^I,$$

$$\theta = g(x)\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_t} = g(x)\mathrm{d}x^J.$$

于是

$$\omega \wedge \theta = f(x)g(x)\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J.$$

根据我们的定义

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\omega \wedge \theta) &= \mathrm{d}(f \cdot g) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = (g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\ &= (\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I) \wedge (g\,\mathrm{d}x^J) + (-1)^s (f\mathrm{d}x^I) \wedge (\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x^J) \\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \theta + (-1)^s \omega \wedge \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

下面验证(D_4)．从 $\mathrm{d}f$ 的表示式

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$$

可得

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

$$= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.$$

在最后一个和式中交换"哑指标"i 和 j 的地位就得到

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \sum_{j>i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i$$

$$= \sum_{i<j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = 0.$$

上面，对于 M 的任意一个局部坐标域 U 定义了

$$\mathrm{d}_U : \Omega(U) \to \Omega(U).$$

对于一般的 $\omega \in \Omega(M)$ 和任意的 $p \in M$, 我们可以任意选取一个包含 p 点的局部坐标域 U, 然后定义

$$(\mathrm{d}\omega)_p = (\mathrm{d}_U(\omega | U))_p.$$

如果 M 的两个局部坐标域 U 和 V 都含有 p 点，那么由于引理 8.3.4

和引理 δ.3.5,

$$(\mathrm{d}_U(\omega|U))_p=(\mathrm{d}_{U\cap V}(\omega|U\cap V))_p,$$
$$(\mathrm{d}_V(\omega|V))_p=(\mathrm{d}_{U\cap V}(\omega|U\cap V))_p,$$
$$(\mathrm{d}_U(\omega|U))_p=(\mathrm{d}_V(\omega|V))_p.$$

因而所作的定义确当无歧义． □

δ.3.7 定理 设 M 和 N 是光滑流形，$f\in C^\infty(M,N)$，$\omega\in\Omega(N)$, 则有

$$\mathrm{d}(f^*\omega)=f^*\mathrm{d}\omega.$$

证明 先取 N 的局部坐标域 V, 然后选取 M 的局部坐标域 U, 使得 $f(U)\subset V$. 鉴于 d 和 f^*定义的局部性质,我们可以限制在 U 上验证

$$\mathrm{d}(f^*\omega)|U=f^*\mathrm{d}\omega|U.$$

不妨设

$$\omega=g(y)\mathrm{d}y^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{i_k}=g(y)\mathrm{d}y^I.$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(f^*\omega)&=\mathrm{d}(g(f(x))\mathrm{d}f^I)=\mathrm{d}(g(f(x)))\wedge\mathrm{d}f^I\\&=f^*\mathrm{d}g(y)\wedge f^*\mathrm{d}y^I=f^*(\mathrm{d}g(y)\wedge\mathrm{d}y^I)\\&=f^*\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$ □

§δ.4 微分形式的积分与一般Stokes 定理

δ.4.1 定义 设 M 是一个 C^∞ 流形，$\omega\in\Omega^k(M)$. M 的子集合

$$\mathrm{supp}\,\omega=\overline{\{p\in M\mid\omega(p)\neq0\}}$$

被称为是 ω 的**支集(或支撑集)**.

若 $\mathrm{supp}\,\omega$ 是紧致的,则称 ω 为**紧支形式**. 约定将 M 上所有的 k 次紧支光滑形式的集合记为 $\Omega_c^k(M)$. 我们还约定记

$$\Omega_c(M)=\Omega_c^0(M)\oplus\Omega_c^1(M)\oplus\cdots$$
$$\cdots\oplus\Omega_c^n(M)\oplus\cdots.$$

δ.4.2 定义 设 M 是定向的 n 维 C^∞ 流形，(U,φ) 是 M 的一

个正向局部坐标图卡，$\omega\in\Omega_c^n(M)$ 适合条件 $\text{supp}\,\omega\subset U$. 于是 ω 可表示成

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n. \tag{δ.4.1}$$

对这种情形，我们定义

$$\int\omega:=\int_{\varphi(U)}f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n,$$

这里等号右边的积分就是通常的 n 重积分.

δ.4.3 命题 上面定义中的 $\int\omega$ 不依赖于局部坐标图卡的具体选择.

证明 设 (V,ψ) 是 M 的另一个正向局部坐标图卡，也适合条件 $\text{supp}\,\omega\subset V$. 则在 $U\cap V$ 上，ω 具有两种局部坐标表示：由 (U,φ) 所决定的(δ.4.1)和由 (V,ψ) 所决定的

$$\omega=g(y)\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n. \tag{δ.4.2}$$

按照微分形式的坐标变换法则，应有

$$\begin{aligned}g(y)&=f((\varphi\circ\psi^{-1})(y))\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\\&=f((\varphi\circ\psi^{-1})(y))\left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|.\end{aligned}$$

利用重积分的变元替换法则可得

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(U)}f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n&=\int_{\varphi(U\cap V)}f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n\\&=\int_{\psi(U\cap V)}f(\varphi\circ\psi^{-1}(y))\left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n\\&=\int_{\psi(U\cap V)}g(y)\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n=\int_{\psi(V)}g(y)\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n.\end{aligned}$$

□

δ.4.4 引理 设 (U,φ) 是 M 的正向局部坐标图卡. 如果 ω_0,

$\omega_1,\cdots,\omega_s\in\Omega_c^n(M)$ 适合条件:

(1) $\operatorname{supp}\omega_i\subset U,\ i=0,1,\cdots,s$;

(2) $\omega_0=\omega_1+\cdots+\omega_s$,

那么

$$\int\omega_0=\int\omega_1+\cdots+\int\omega_s.$$

δ.4.5 定义 设 M 是定向的 n 维光滑流形, $\omega\in\Omega_c^n(M)$. 任取 M 的一个局部有限的正向局部坐标图汇 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ 和从属于覆盖 $\{U_\alpha\mid\alpha\in A\}$ 的一个单位分解 $\{\eta_\alpha\mid\alpha\in A\}$:

$$\eta_\alpha\in C_c^\infty(M,\mathbb{R}),\quad \operatorname{supp}\eta_\alpha\subset U_\alpha,\quad \sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha\equiv 1.$$

于是可将 ω 表示为

$$\omega=\sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha\omega,\quad \operatorname{supp}\eta_\alpha\omega\subset U_\alpha.$$

我们定义

$$\int\omega:=\sum_{\alpha\in A}\int\eta_\alpha\omega. \tag{δ.4.3}$$

因为 $\operatorname{supp}\omega$ 仅与有限个 U_α 有非空的交集,所以 (δ.4.3) 的右端实际上只是有限个积分之和.

δ.4.6 命题 定义 δ.4.5 不依赖于局部有限的正向图汇和相应的单位分解的选取.

证明 考察 M 的另一个局部有限的正向图汇 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\mid\beta\in B\}$ 和相应的单位分解

$$\rho_\beta\in C_c^\infty(M,\mathbb{R}),\quad \operatorname{supp}\rho_\beta\subset V_\beta,\quad \sum_{\beta\in B}\rho_\beta\equiv 1.$$

我们有

$$\eta_\alpha\omega=\eta_\alpha\sum_{\beta\in B}\rho_\beta\omega=\sum_{\beta\in B}\eta_\alpha\rho_\beta\omega,\qquad \rho_\beta\omega=\sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha\rho_\beta\omega.$$

由引理 δ.4.4 可知

$$\int \eta_\alpha \omega = \sum_{\beta \in B} \int \eta_\alpha \rho_\beta \omega,$$

$$\int \rho_\beta \omega = \sum_{\alpha \in A} \int \eta_\alpha \rho_\beta \omega.$$

利用这些关系，我们得到

$$\sum_{\alpha \in A} \int \eta_\alpha \omega = \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} \int \eta_\alpha \rho_\beta \omega$$

$$= \sum_{\beta \in B} \sum_{\alpha \in A} \int \eta_\alpha \rho_\beta \omega$$

$$= \sum_{\beta \in B} \int \rho_\beta \omega. \qquad \square$$

为了叙述一般的 Stokes 定理，需要指明定向带边流形在其边缘流形上的诱导定向．首先，我们约定记

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid x^0 \geqslant 0\}.$$

设 M 是定向的 n 维光滑带边流形，则对于任意的 $p \in \partial M$，存在 p 点邻近的正向局部坐标图卡 (U, φ)，使得 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^n_+$ 中的开集合，并且

$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

这里

$$0 \times \mathbb{R}^{n-1} = \{(0, x^1, \cdots, x^{n-1}) \mid (x^1, \cdots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

容易验证：对于覆盖了 ∂M 的那些局部坐标图卡 $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$，相应的 $(x^1, \cdots, x^{n-1})$ 构成 ∂M 的定向局部坐标．用这样的方式确定的 ∂M 的定向被称为：由 M 的定向确定的 ∂M 的"**内向型"诱导定向**．相反的定向被称为"**外向型"诱导定向**．

δ.4.7 定理(一般的 Stokes 定理) 设 M 是一个定向的 n 维光滑带边流形，$\omega \in \Omega^{n-1}_c(M)$．我们约定赋予 ∂M"外向型"诱导定向．则有以下公式：

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

特别地，当 M 是紧致流形时，这公式对任何 $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ 成立.

证明 设$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in A\}$ 是覆盖 M 的一族局部有限的可数个正向图卡. 我们将 ω 表示成这样一些紧支 $n-1$ 次形式之和

$$\omega = \sum_{\alpha \in A} \omega_\alpha,$$

使得
$$\operatorname{supp}\omega_\alpha \subset U_\alpha, \ \forall \alpha \in A.$$

借助于$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$的坐标，可将 ω_α 表示成

$$\omega_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i g_i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$$

$$(g_i \in C_c^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}), \quad i = 0, \cdots, n-1).$$

于是

$$d\omega_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}.$$

对于 $x = (x^0, x^1, \cdots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}_+^n$，我们约定记

$$x' = (\widehat{x^0}, x^1, \cdots, x^{n-1}) = (x^1, \cdots, x^{n-1}),$$

$$x_i' = (x^0, \cdots, \widehat{x^i}, \cdots, x^{n-1}) \quad (i = 1, \cdots, n-1).$$

还约定记

$$\mathbb{R}_i^{n-1} = \{x_i' \mid x \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

以下分两种情形计算 $\int_M d\omega_\alpha$.

情形 I　$U_\alpha \cap \partial M = \varnothing$. 对这种情形有

$$\int_M d\omega_\alpha = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_0}{\partial x^0} dx^0 \right) dx' + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}_i^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial g_i}{\partial x^i} dx^i \right) dx_i'$$

$$= 0 = \int_{\partial M} \omega_\alpha.$$

情形 II　$U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$. 对这种情形有

$$\int_M \mathrm{d}\omega_\alpha = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_0}{\partial x^0} \mathrm{d}x^0 \right) \mathrm{d}x' + 0$$

$$= -\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_0(0, x') \mathrm{d}x'$$

$$= -\int_{(\partial M)^-} \omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega_\alpha .$$

在上面的计算中,我们以 $(\partial M)^-$ 表示 ∂M 的"内向型"诱导定向.

综合以上两种情形,我们得到

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_{\alpha \in A} \int_M \mathrm{d}\omega_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \int_{\partial M} \omega_\alpha = \int_{\partial M} \omega. \qquad \square$$

参 考 文 献

除了序言中提到的微分拓扑教材而外，下面列举的著作也都是本书的参考文献．

[Ab] Abraham, R. and Marsden, J. E., *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[Au] Auslander, L. and Mackenzie, R. E., *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill Book Company, 1963.

[Be] Berger, M. and Gostiaux, B., *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 1988.

[Bi] Bishop, R.L. and Crittenden, R.J., *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.

[Bo] Boothby, W.M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (2nd Ed.), Academic Press, 1986.

[Ch] 陈省身、陈维桓，《微分几何讲义》，北京大学出版社，北京，1983.

[De] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[Di] Dieudonné, J., *Treatise on Analysis*, Vol. Ⅲ, Academic Press, 1972.

[Du] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[Go] Golubitsky, M. and Guillemin, V. W., *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer-Verlag, 1973.

[Gr] Gramain, A., *Topologie des Surfaces*, Presse Universitaire de France, 1971. (张耀成译，《曲面拓扑学》，科学出版社，北京，1981.)

[Ka] Kahn, D.W., *Introduction to Global Analysis*, Academic Press, 1980.

[Ma] Maunder, C.R.F., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.

[Mi] Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963. (江嘉禾译，《莫尔斯理论》，科学出版社，北京，1988.)

[Na] Narasimhan, R., *Analysis on Real and Complex Manifolds* (2nd Ed.),

North Holland, Inc., 1973. (陆柱家译,《实流形和复流形上的分析》,科学出版社,北京,1986.)

[Si] Singer, I.M. and Thorpe, J.A., *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1967. (干丹岩译,《拓扑学与几何学基础讲义》,上海科学技术出版社,上海,1985.)

[Sp] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differetial Geometry*, Vol. I (2nd Ed.), Publish or Perish, Inc., 1979.

[St] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Printice-Hall, 1964.

[Wa] Warner, F.W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983.

[Zh] 詹汉生,《微分流形导引》,北京大学出版社,北京,1987.

术 语 索 引

按中文首字笔画顺序排列(凡以外文字母开始的词组均归入一画)，每条术语后所附数码表示该术语在本书中出现的章，节.

一　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十二画及十二画以上

符号索引

符号后所附数码表示该符号在本书中出现的章，节．